

序言	5
----------	---

第一章 球面几何

§ 1. 球面基本概念	6
1.1 球、球面	6
1.2 球面上的圆	6
1.3 轴、极、极距、极线	7
1.4 球面角、球面角的度量	7
§ 2. 球面三角形	9
2.1 球面三角形	9
2.2 极线三角形	11
2.3 球面三角形与其极线三角形的关系	11
2.4 球面三角形的性质	13
§ 3. 球面三角形作图	14
3.1 球面三角形作图概念	14
3.2 基本作图法	15
例题1~3	18~20

第二章 球面三角

§ 4. 球面任意三角形	23
4.1 球面三角形基本公式的证明	23
4.2 球面正弦公式	25
例题4~5	26~27
4.3 球面五联关系式、球面四联关系式	28
例题6~7	29~31

4.4 球面余弦公式	32
例题8~11	33~37
4.5 球面半正矢公式、球面半正矢补角公式	38
例题12~13	40~41
4.6 球面半角公式、球面半边公式	42
例题14~15	46~47
4.7 德朗布尔方程式、訥比尔相似方程式	48
例题16	50
§ 5. 球面直角三角形、球面直边三角形	51
5.1 球面直角三角形公式	51
5.2 球面直角三角形各要素的关系	53
例题17~19	54~56
5.3 球面直边三角形公式	58
5.4 球面直边三角形各要素的关系	60
例题20~21	60~61
§ 6. 球面初等三角形	62
6.1 小角度的三角函数	62
6.2 小的球面初等三角形	63
6.3 窄的球面初等三角形	67
例题22	70
§ 7. 球面三角形解法	72
7.1 解球面三角形的一般步骤	72
7.2 已知三边的球面三角形解法	73
例题23	74
7.3 已知三角的球面三角形解法	75
例题24	76
7.4 已知二边及其夹角的球面三角形解法	77
例题25	78
7.5 已知二角及其夹边的球面三角形解法	80

例題26	80
7.6 已知二边及其一边对角的球面三角形解法	81
例題27	81
7.7 已知二角及其一角对边的球面三角形解法	83
例題28	83

第三章 球面三角微分关系式

§ 8. 球面三角微分关系式	86
----------------	----

第四章 球面角盈及球面三角形面积

§ 9. 球面角盈	89
9.1 球面角盈	89
9.2 加諾里(Cagnoli)球面角盈公式	89
9.3 留里尔(Lhuillier)球面角盈公式	90
9.4 欧勒(Euler)球面角盈公式	92
§ 10. 球面三角形面积	93
例題29	94

第五章 球面內切圓及球面外接圓

§ 11. 球面內切圓及球面外接圓	96
11.1 球面內切圓、球面外接圓、球面半徑	96
11.2 球面內切圓半徑公式	97
11.3 球面外接圓半徑公式	99
例題30—31	102~104

第六章 球面曲綫

§ 12. 球面座标	106
12.1 球面座标系	106
12.2 球面極座标	106

12.3	球面直角座标	107
12.4	球面極座标与球面直角座标的关系	107
§ 13.	球面曲綫方程式	108
13.1	球面大圓曲綫方程式	108
13.2	球面小圓曲綫方程式	110
13.3	球面橢圓曲綫方程式	111
13.4	球面双曲綫方程式	113
附录:		
1.	球面三角公式彙編	115
2.	平面三角公式彙編	130

序 言

本教材是作者根据几年来在航海專業教學上的經驗，并参考以下著作：

- | | |
|--------------------------------------|--|
| 1)球面三角学 | 李光蔭著 |
| 2)Сферическая Тригонометрия
球面三角学 | Ф. Ф. Павлов, В. П. Машкович
刘亞星譯 |
| 3)Сферическая Тригонометрия | Проф. М. К. Вентцель |
| 4)Plane and Spherical Trigonometry | H. B. Goodwin, M. A. |
| 5)Plane and Sphuical Trigonometry | H. T. Muhly, Ph. D., S. S.
Saslaw, Ph. D. |

將旧編的講义加以修改而写成的。

在这教材中，对所有的公式，都予以詳細証明，而对一般性的叙述，則尽量精簡。在解球面三角形时，特別強調必須依照航海習慣所采用的計算順序和数据排列格式。教材的內容，較一般的球面三角学增加了球面曲綫及球面三角微分关系式等部分，这对于研究新式無綫电助航定位理論，及定位誤差是必要的。

本教材对于航空、測量、制圖、天文等專業，也是有用的。

在編写的过程中，大連海运学院航海学教研組及航海技术研究組會給予了充分协助，并提供了改进意見。謹向他們致以深深的謝意。

初稿問世，謬誤在所难免，尙祈讀者惠予批評和指正。

作 者

第一章 球 面 几 何

§1. 球 面 基 本 概 念

1.1 球、球面

半圓周繞直徑旋轉而成的旋轉面叫作球面。球面所包圍的幾何體叫作球。球心是球體中間的一個定點，由這定點到球面任何一點的直綫距離相等。球心到球面的直綫距離叫作球的半徑；同一球體的半徑相等。經過球心而兩端為球面所截的直綫叫作球的直徑；直徑為半徑的兩倍，同一球體的直徑自亦相等。

1.2 球面上的圓

任意平面截于球面的截痕是一個圓。經過球心的平面所截的圓叫作大圓；不經球心的平面所截的圓叫作小圓。

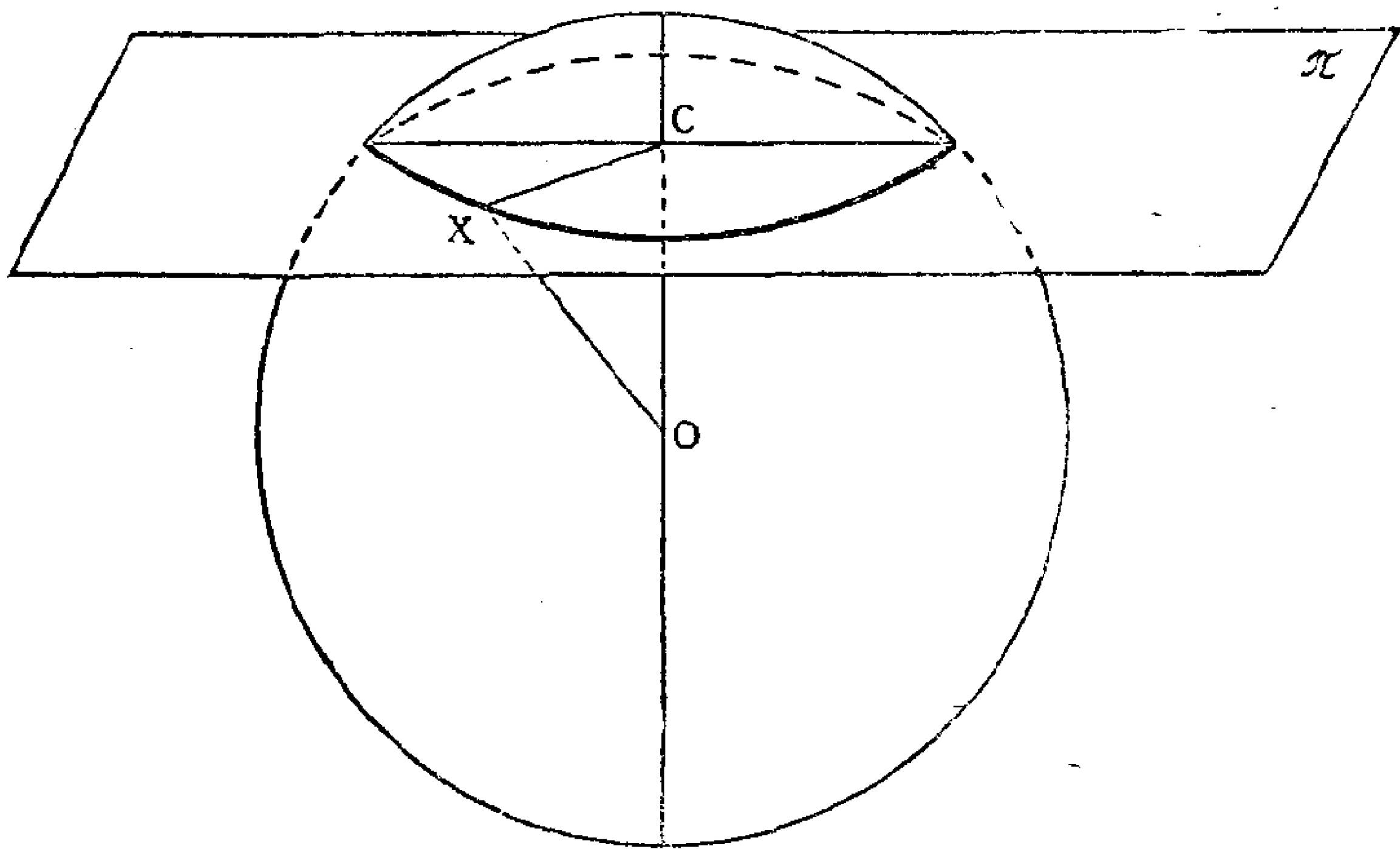


圖 1

設 x 為平面 π 所截的球面截痕上一個任意點(圖 1)。由球心 O 作 OC

垂直于平面 π 并交于 c ，連 ox 及 cx ，則 \widehat{ocx} 为直角， Δocx 为直角三角形。 $cx = \sqrt{ox^2 - oc^2}$ 。从这个式中，可以看到，不論 x 在截痕上任何位置，对于平面 π 而言， oc 是一个定值，而 ox 为球的半径，亦是一个定值。所以截痕上任何点到 c 的距离恒等。由此，根据圆的几何定义，可以断定截痕是一个圆， c 是它的中心， cx 是它的半径。

大圆平面经过球心，这时由球心到平面的垂线 oc 等于零，因而大圆的半径与球的半径相等，球心即大圆的中心；对于不经过球心的小圆平面， oc 恒大于零，因而 $cx < ox$ ，即小圆的半径恒小于球的半径。

经过球面上不在直径两端的二点，仅能作一个大圆，因为不在直径两端的二点仅能作一个平面经过球心。連球面上两点的大圆弧长叫作这二点间的球面距离。航海以哩作为计算距离的单位，所谓一哩即是 $1'$ 球心角所对的球面大圆弧长。

两个大圆平面的交线是球的直径，也是这两个大圆的直径。因为大圆平面必须经过球心，所以球心既在一个大圆的面上，又在另一个大圆的面上。只有平面交线上的点才能同时在相交的平面上，所以球心是大圆平面交线上的一个点，或者说大圆平面的交线经过球心。大圆平面的交线是经过球心的直线，又为球面所截，因而是球的直径。又因球心即是大圆平面的中心，大圆平面的交线是大圆平面上经过大圆中心的直线，线的两端抵于大圆的周，因此大圆平面的交线，又是大圆的直径。

1.3 轴、极、极距、极线

垂直于圆面的球直径，叫作这个圆的轴。轴的端叫作圆的极。由极到圆的球面距离叫作极距；同一圆的极距相等。圖 2，球直径 PP_0 垂直于以 c 为中心的圆平面，所以 PP_0 是这个圆的轴， P 和 P_0 是它的极，极 P 或 P_0 到圆上各点 a, b 的球面距离，是由极到各该点的极距。极距 \widehat{Pa} 、 \widehat{Pb} 相等。极距为 90° 的圆弧，又叫作该极的极线。圖 2， $\widehat{PA} = \widehat{PB} = 90^\circ$ ， \widehat{AB} 为 P 的极线。大圆，只有大圆，距它的极为 90° ，所以，大圆弧是它的极的极线；反之，极的极线必须是大圆弧。

1.4 球面角、球面角的度量

球面上由两个大圆弧构成的角叫作球面角。构成球面角的大圆弧叫

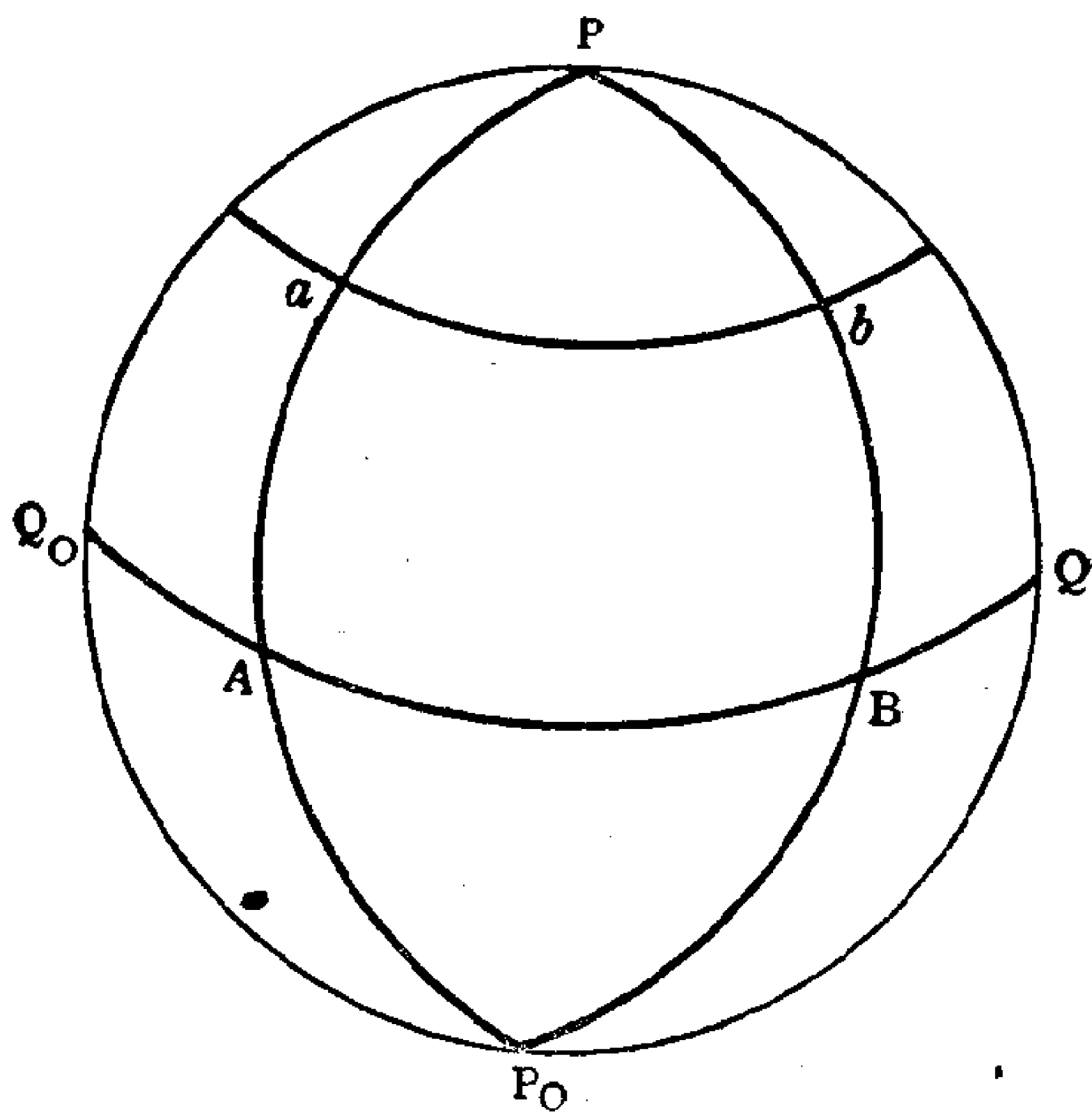


圖 2

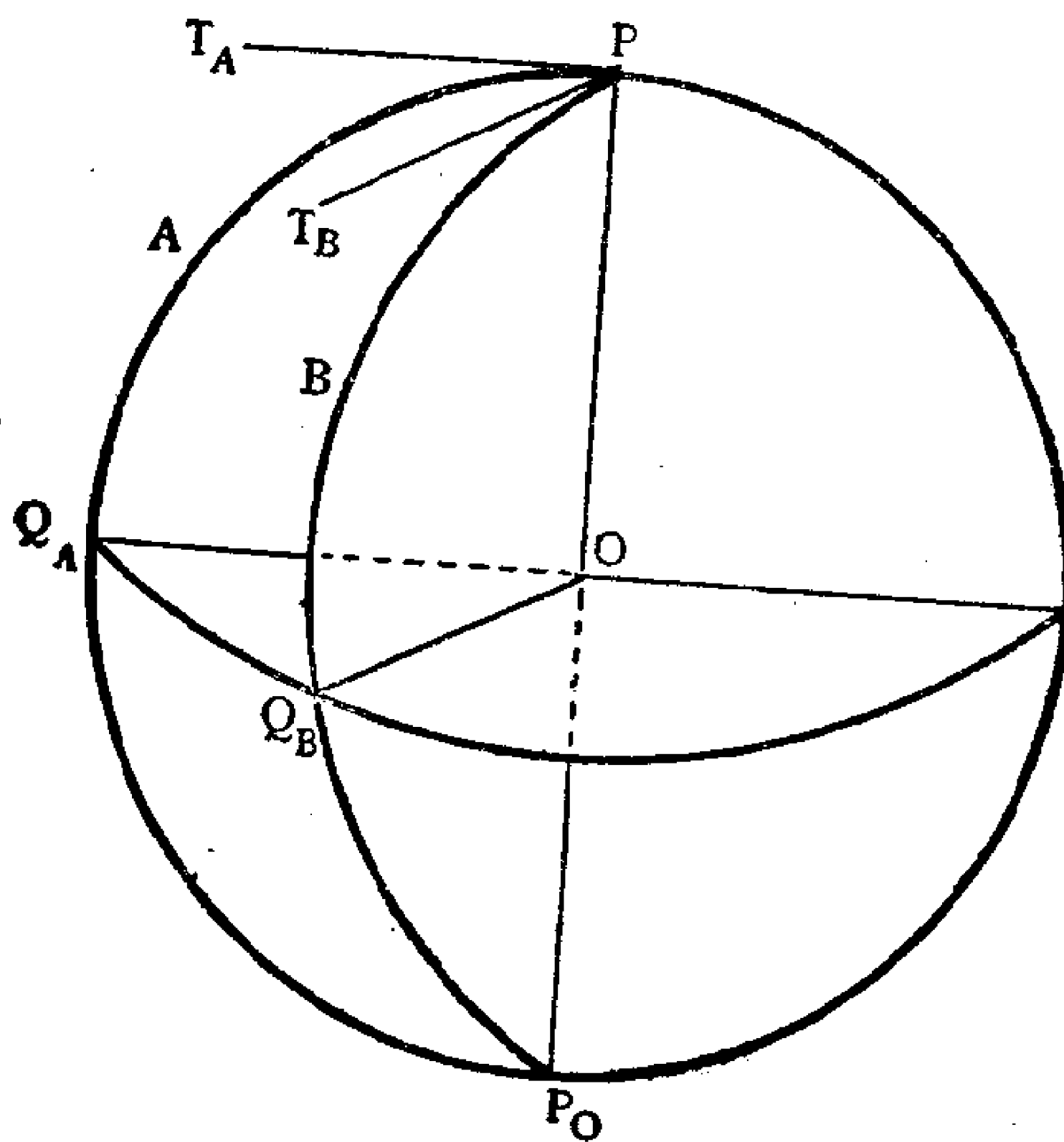


圖 3

作球面角的边，大圆弧的交点叫作該球面角的頂点。

圖 3，大圆弧 PAP_0 、 PBP_0 相交于 P 及 P_0 ， \widehat{APB} 或 $\widehat{AP_0B}$ 叫作球面角。 P 是球面角 \widehat{APB} 的頂点，而 P_0 則是 $\widehat{AP_0B}$ 的頂点；大圆弧 \widehat{PA} 、 \widehat{PB} 是 \widehat{APB} 的边， $\widehat{P_0A}$ 、 $\widehat{P_0B}$ 是 $\widehat{AP_0B}$ 的边。

球面角有以下各种度量的方法：

- 大圆平面所構成的二面角($A-PP_0-B$)；
- 切于頂点的大圆弧切綫的夾角($T_A\widehat{PT}_B$)；
- 頂点的極綫被大圆平面所截的弧段($\widehat{Q_AQ_B}$)，或該弧段所对的球心角($\widehat{Q_AOQ_B}$)。

§2. 球面三角形

2.1 球面三角形

球面上三个大圆弧所構成的三角形 ABC (圖 4a) 叫作球面三角形。構成三角形的大圆弧叫作球面三角形的边。

一个三角形共有六个部分，即三个角及三个边，这些部分叫作球面三角形的要素。各要素均小于 180° 而大于 0° 的三角形叫作“欧勒”球面三角形；設有一个或一个以上的要素大于 180° ，則三角形叫作“馬比阿斯——斯圖第”球面三角形。本教材所涉及的仅限于欧勒球面三角形。

球面三角形的頂点常用 A 、 B 、 C 标注，而 A 、 B 、 C 又分別表示各該点的角；各角所对的边則用 a 、 b 、 c 表示之。

对称于 A 、 B 、 C 各点的大圆弧所構成的另一个三角形 $A_0B_0C_0$ (圖 4b) 叫作球面三角形 ABC 的对称三角形。各对称部分相等，两个三角形也相等。

球面三角形中凡有两个边或两个角相等，三角形叫作球面等腰三角形；三边或三角相等，叫作球面等边三角形；一个角为 90° ，叫作球面直角三角形；一个边为 90° ，叫作球面直边三角形；一个角及其所对边甚小，或三个边均甚小，叫作窄的或小的球面初等三角形；凡不具有上述条件的三角形，叫作球面任意三角形。球面三角形为上述各类三角形的統称，但經常則被用作球面任意三角形的簡称。

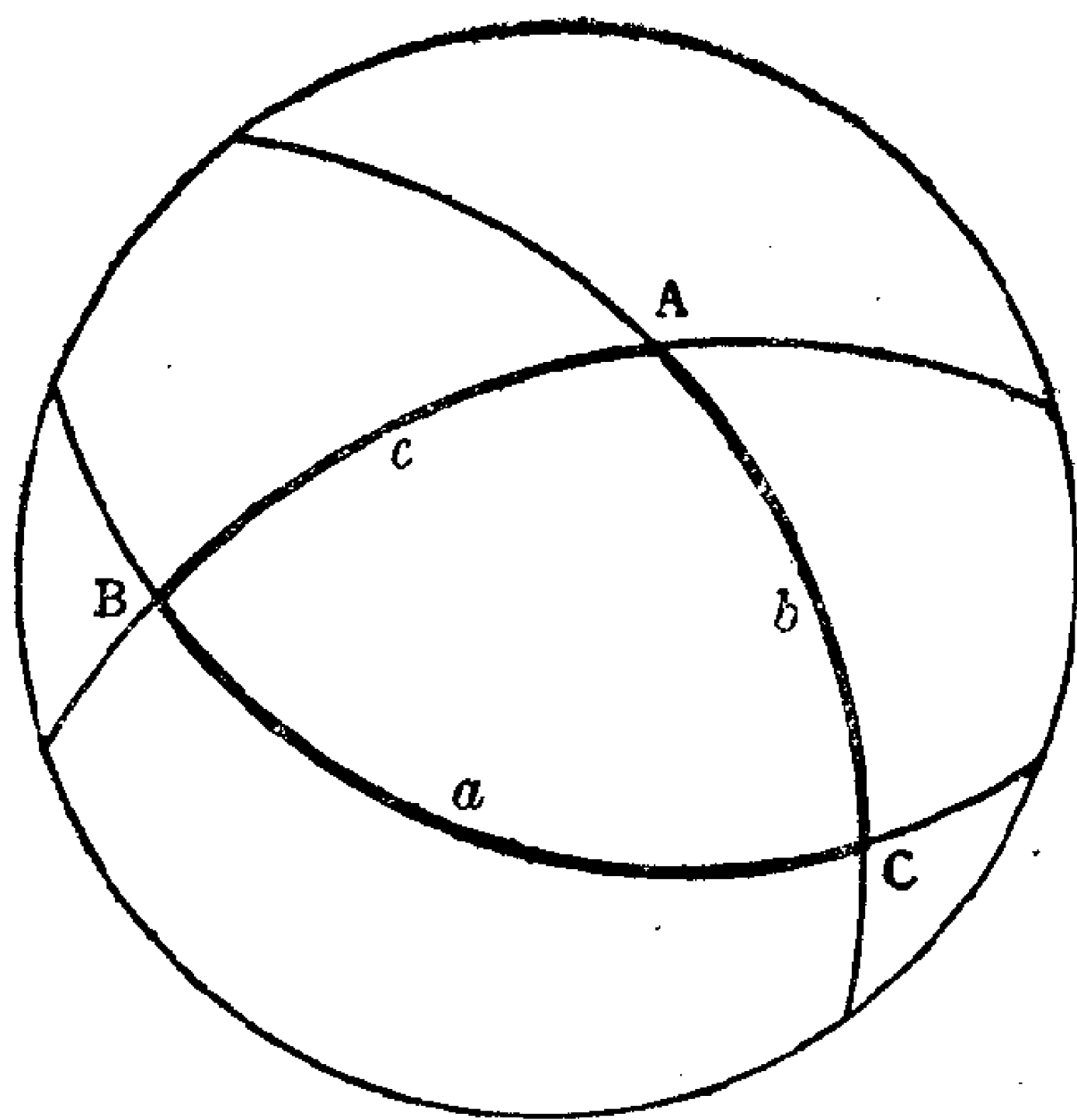


图 4a

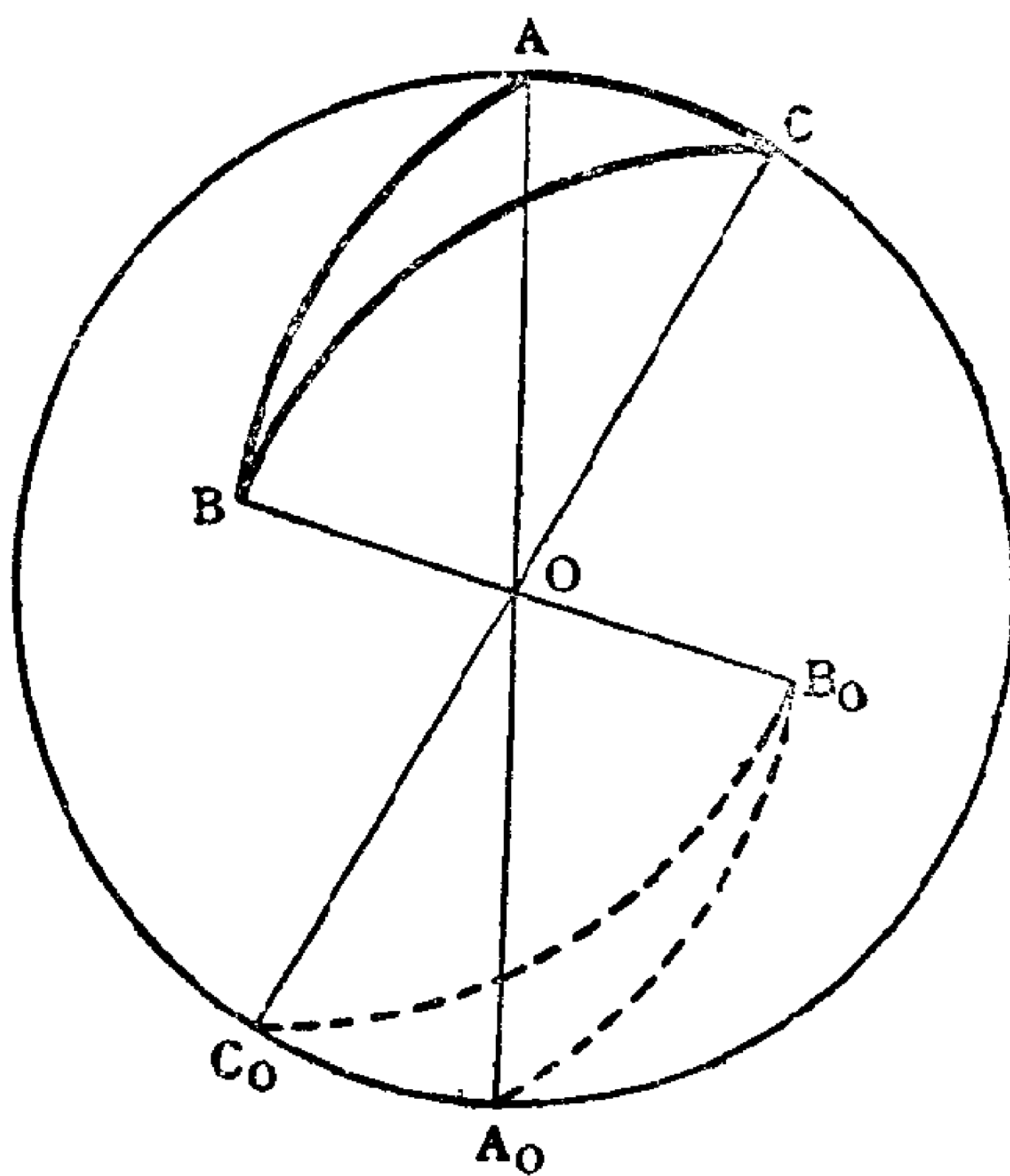


图 4b

2.2 極綫三角形

球面三角形頂點的極綫所構成的三角形，叫作該球面三角形的極綫三角形。極綫三角形的頂點常以 A' 、 B' 、 C' 標註，並用以表示各該頂點的角； a' 、 b' 、 c' 則分別表示各該角所對的邊。 A' 、 B' 、 C' 必需在 A 、 B 、 C 的同側(圖 5)。

球面三角形各邊均小於 90° ，則極綫三角形在原球面三角形之外；球面三角形各邊均大於 90° ，則極綫三角形在原球面三角形之內；球面三角形的一邊或二邊小於 90° ，其餘的邊大於 90° ，則極綫三角形與原球面三角形相交叉。

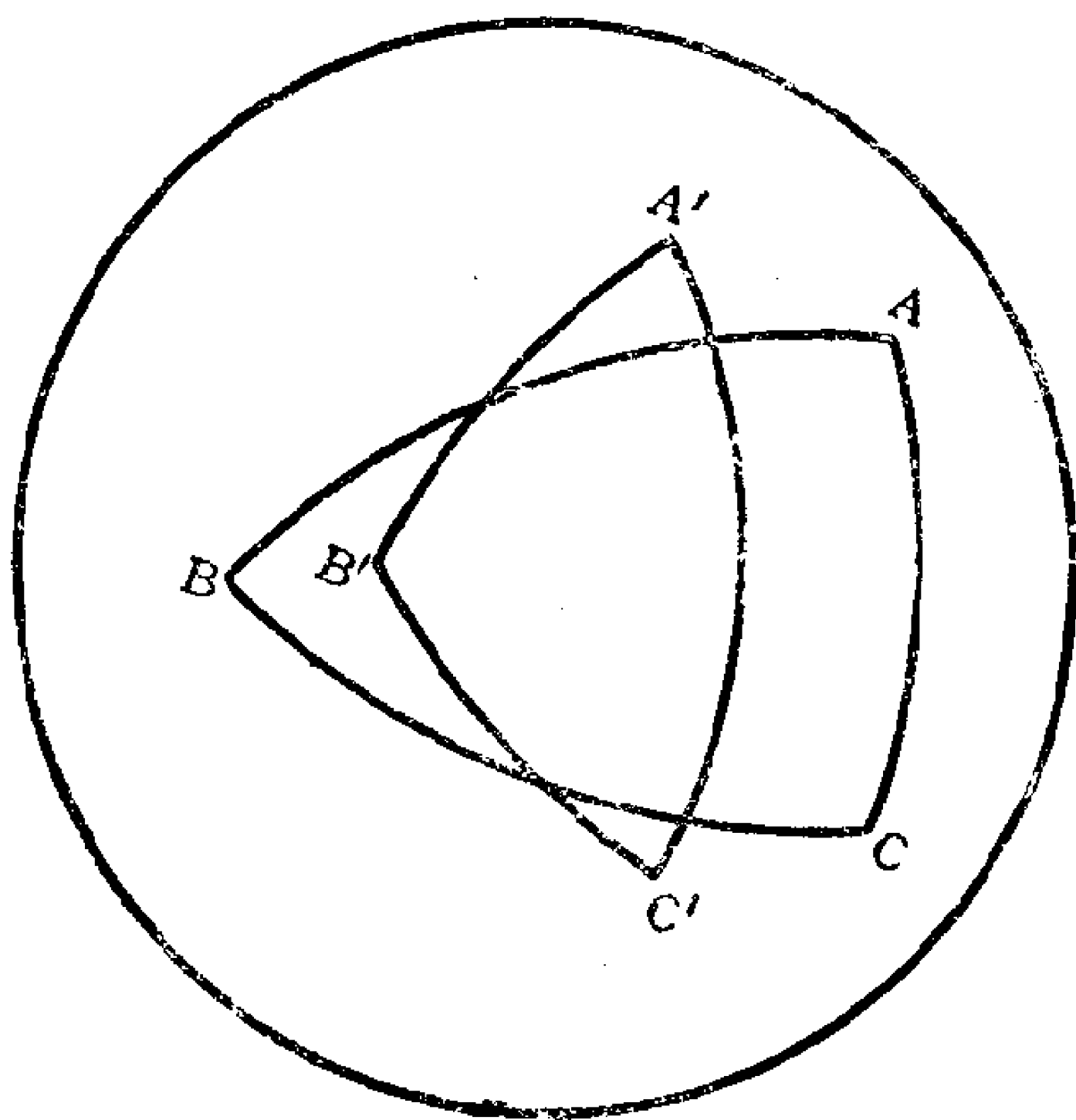


圖 5

2.3 球面三角形與其極綫三角形的關係

a. 球面三角形各頂點為其極綫三角形各對應邊的極。

設 $A'B'C'$ 為球面三角形 ABC 的極綫三角形(圖 6)，根據定義， a' 、 b' 、 c' 分別為 A 、 B 、 C 各頂點的極綫，頂點 A 、 B 、 C 分別為 a' 、 b' 、 c' 各邊的極。

b. 極綫三角形各頂點為其原球面三角形各對應邊的極。

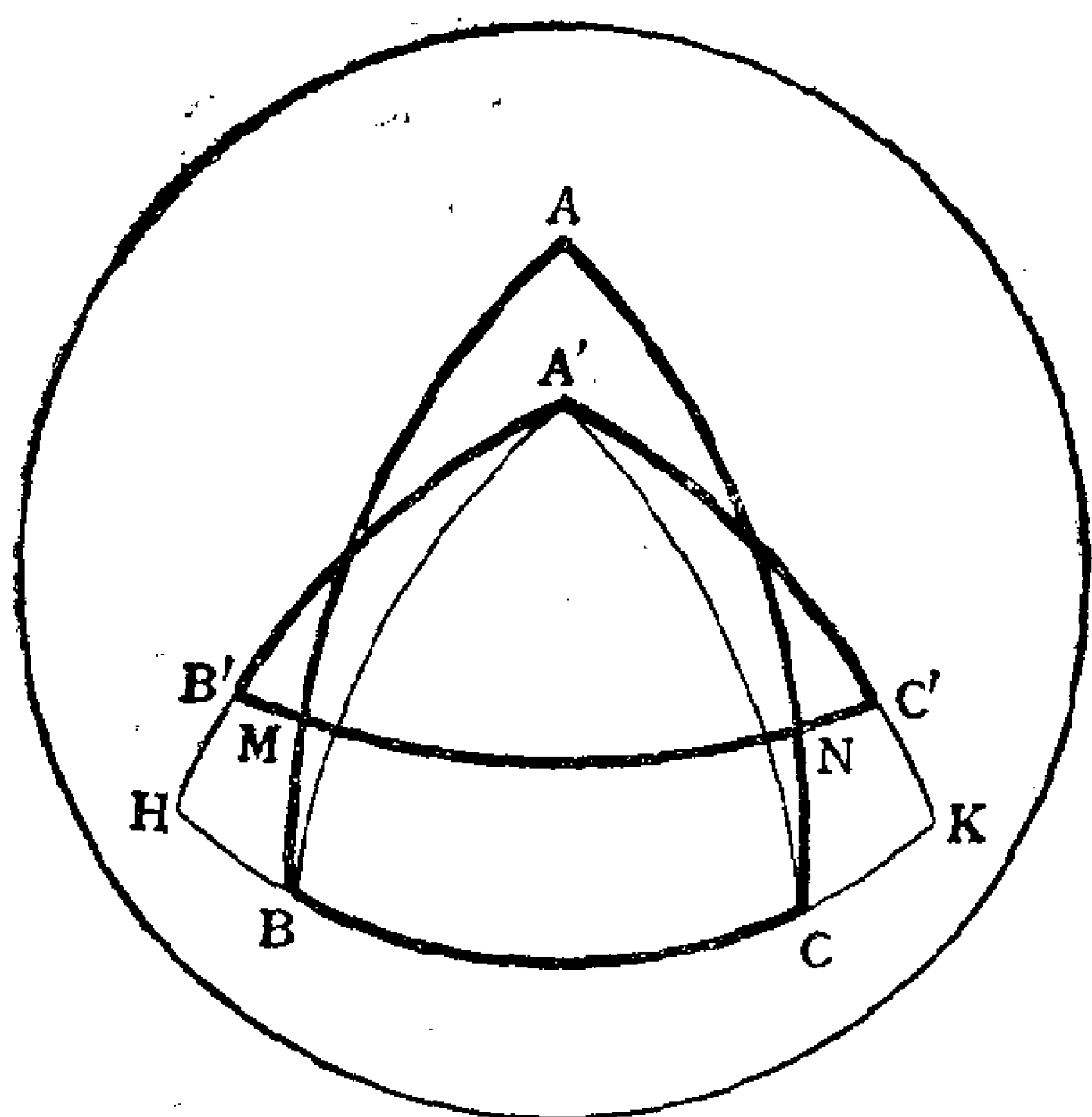


圖 6

由圖 6，已知 B 為 b' 的極， C 為 c' 的極，故 $\widehat{BA'} = 90^\circ$ ， $\widehat{CA'} = 90^\circ$ 。但球心角 $A'OB$ 及 $A'OC$ 可以分別用 $\widehat{BA'}$ 及 $\widehat{CA'}$ 度量，所以 $\widehat{A'OB} = \widehat{A'OC} = 90^\circ$ 。今 $A'O$ 與 OB 及 OC 成為直角，故 $A'O$ 垂直於大圓 BC 的面。又因 $A'O$ 經過大圓 BC 的圓心 O_1 ，故 $A'O$ 為大圓 BC 的軸， A' 為大圓 BC 的極。同理可証 B' 為 \widehat{AC} 的極， C' 為 \widehat{AB} 的極。

c. 球面三角形的邊(角)與其極綫三角形的角(邊)互為補角。即

$$a + A' = 180^\circ \quad b + B' = 180^\circ \quad c + C' = 180^\circ$$

$$A + a' = 180^\circ \quad B + b' = 180^\circ \quad C + c' = 180^\circ$$

在圖 6 延長 \widehat{AB} 、 \widehat{AC} 交 $\widehat{B'C'}$ 於 M 、 N ，並延長 \widehat{BC} 交 $\widehat{A'B'}$ 、 $\widehat{A'C'}$ 於 H 、 K

今

$$\begin{aligned} A' &= \widehat{HK}, \\ \widehat{HK} &= \widehat{HC} + \widehat{CK} \\ &= 90^\circ + 90^\circ - \widehat{BC} \\ &= 180^\circ - a. \end{aligned}$$

故

$$a + A' = 180^\circ.$$

同理

$$b + B' = 180^\circ;$$

$$c + C' = 180^\circ.$$

又

$$a' = \widehat{B'C'},$$

$$\begin{aligned}\widehat{B'C'} &= \widehat{B'N} + \widehat{NC'} \\ &= 90^\circ + 90^\circ - \widehat{MN} \\ &= 180^\circ - A.\end{aligned}$$

故 $A + a' = 180^\circ$ 。

同理 $B + b' = 180^\circ$ ；

$C + c' = 180^\circ$ 。

2.4 球面三角形的性質

a. 球面三角形的边是大圆弧。

b. 球面三角形的每一边必大于 0° 而小于 180° ，三边的和必大于 0° 而小于 360° 。球面三角形的边是以它们所对的球心角来度量，对球面三角形的三边的球心角则构成以球心为顶点的三面角；由立体几何已知三面角的各平面角的和大于 0° 而小于 360° ，故球面三角形三个边的和必大于 0° 而小于 360° 。

c. 球面三角形任一边必小于其它二边的和而大于其它二边的差。因三面角的任一平面角必小于其它两个平面角的和而大于它的差。

d. 球面三角形的每一角必大于 0° 而小于 180° ，三个角的和必大于 180° 而小于 540° 。其超出 180° 的部分叫作球面角盈，通常用 E 表示之。即

$$E = A + B + C - 180^\circ$$

已知球面三角形的三边的和大于 0° 而小于 360° ，对于极线三角形自亦

$$0^\circ < a' + b' + c' < 360^\circ$$

但 $a' + b' + c' = 540^\circ - (A + B + C)$ ，

故 $180^\circ < A + B + C < 540^\circ$

e. 球面三角形的角不等，则不等角所对的边亦不等，大角必对大边，反之，大边必对大角。

首先证明大角必对大边。设球面三角形 ABC ， $B > C$ (圖 7)。在 B 取 $\widehat{DBC} = C$ ，并使 \widehat{BD} 交 \widehat{AD} 于 D ，于是 DBC 为球面等腰三角形， $\widehat{DB} = \widehat{DC}$ 。但 $\widehat{AD} + \widehat{DB} > \widehat{AB}$ ，代入得 $\widehat{AD} + \widehat{DC} > \widehat{AB}$ ，即 $\widehat{AC} > \widehat{AB}$ 。

现在再反证大边必对大角。设 $b > c$ ，则 $180^\circ - B' > 180^\circ - C'$ ，或 $B' < C'$ ，由上面的证明得 $b' < c'$ ，或 $180^\circ - B < 180^\circ - C$ ，即 $B > C$ 。

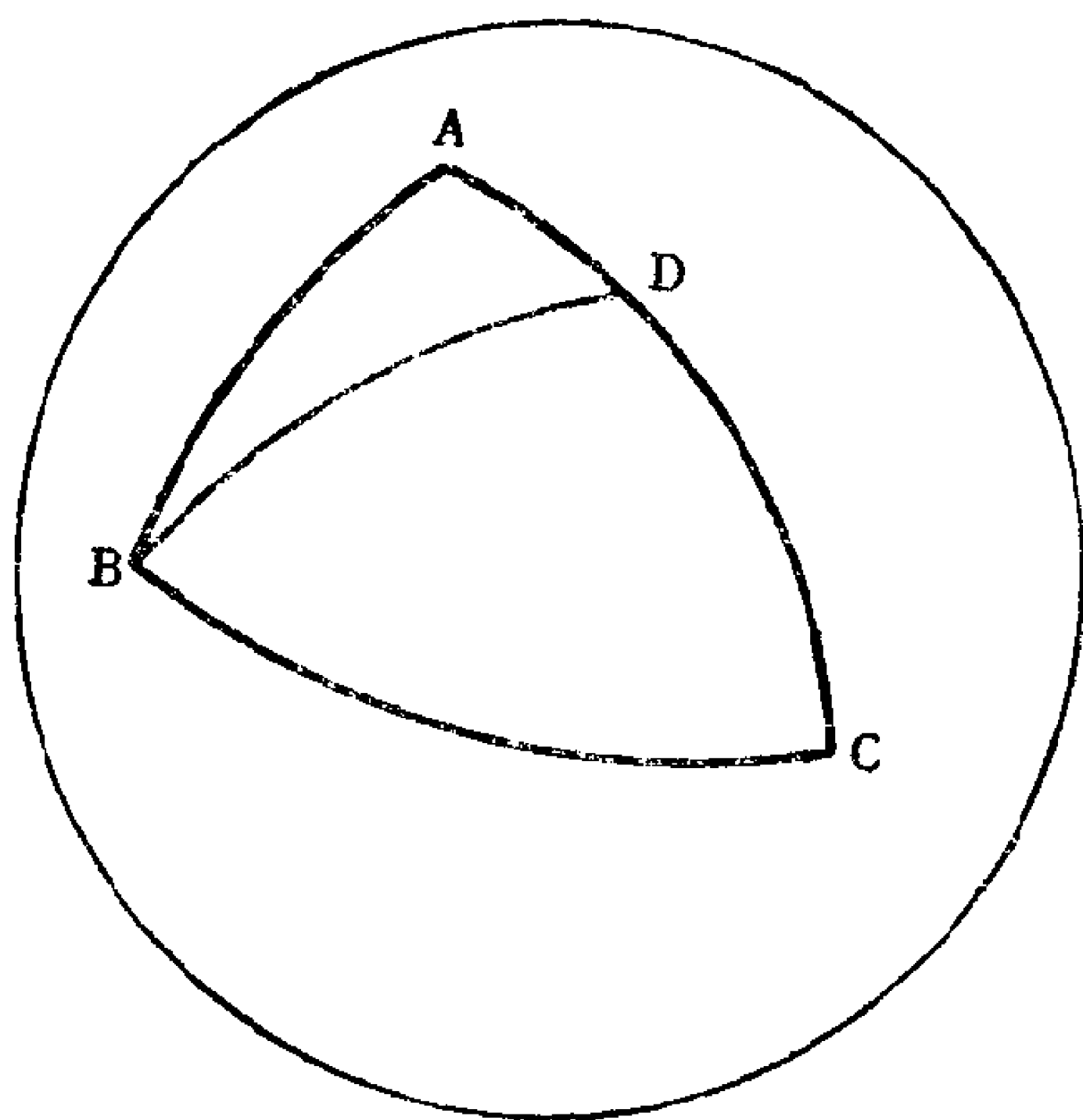


圖 7

§3. 球面三角形作圖

3.1 球面三角形作圖概念

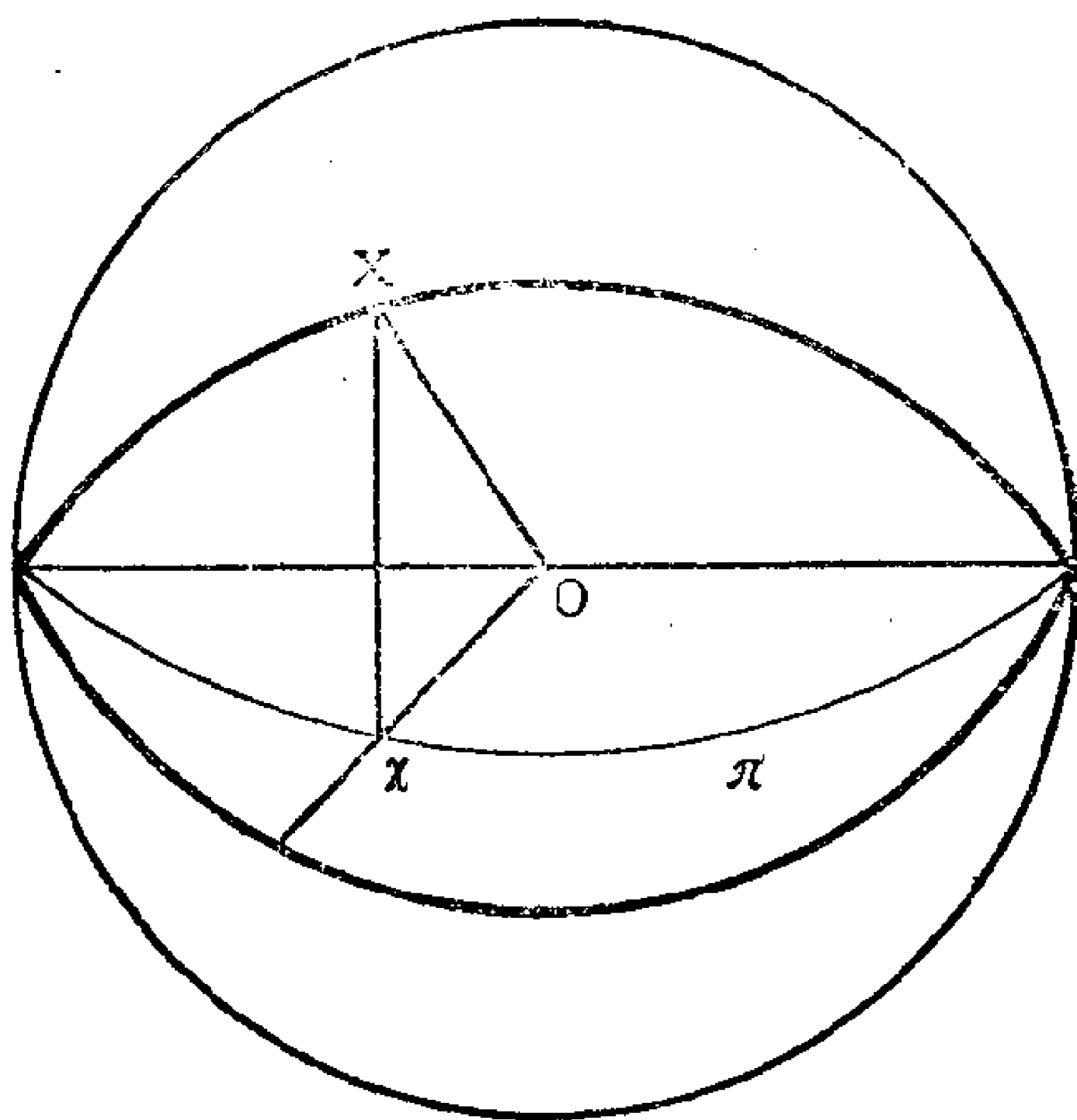


圖 8

球面三角形作圖，就其性質而論，是屬於透視投影；但由于作圖的目的，僅為在平面圖上画出球面三角形圖形，從而估計該三角形各要素間的關係，所以對於變形及精確度等問題，並不嚴格地計較。為了制圖簡便起見，一般是採用一種近似於正射投影作圖的理論及方法。由球面任意點 X 作 Xx 垂直到大圓平面 π ，交 π 於 x ，則 x 稱為 X 在投影面 π 的正射投影(圖8)。當 X 在球面作弧形移動時，它的投影 x 亦在投影面作弧形移動，投影面上的弧形就是球面上弧形的投影。球面上圓弧的投影仍為弧形，只有圓弧的面與投影面成直角時，圓弧的投影成直線。

3.2 基本作圖法

a. 已知圓的極的投影及極距，作圓的投影。

設圓的極的投影 P 在投影面圓周(圖9)，極距為 α° 。

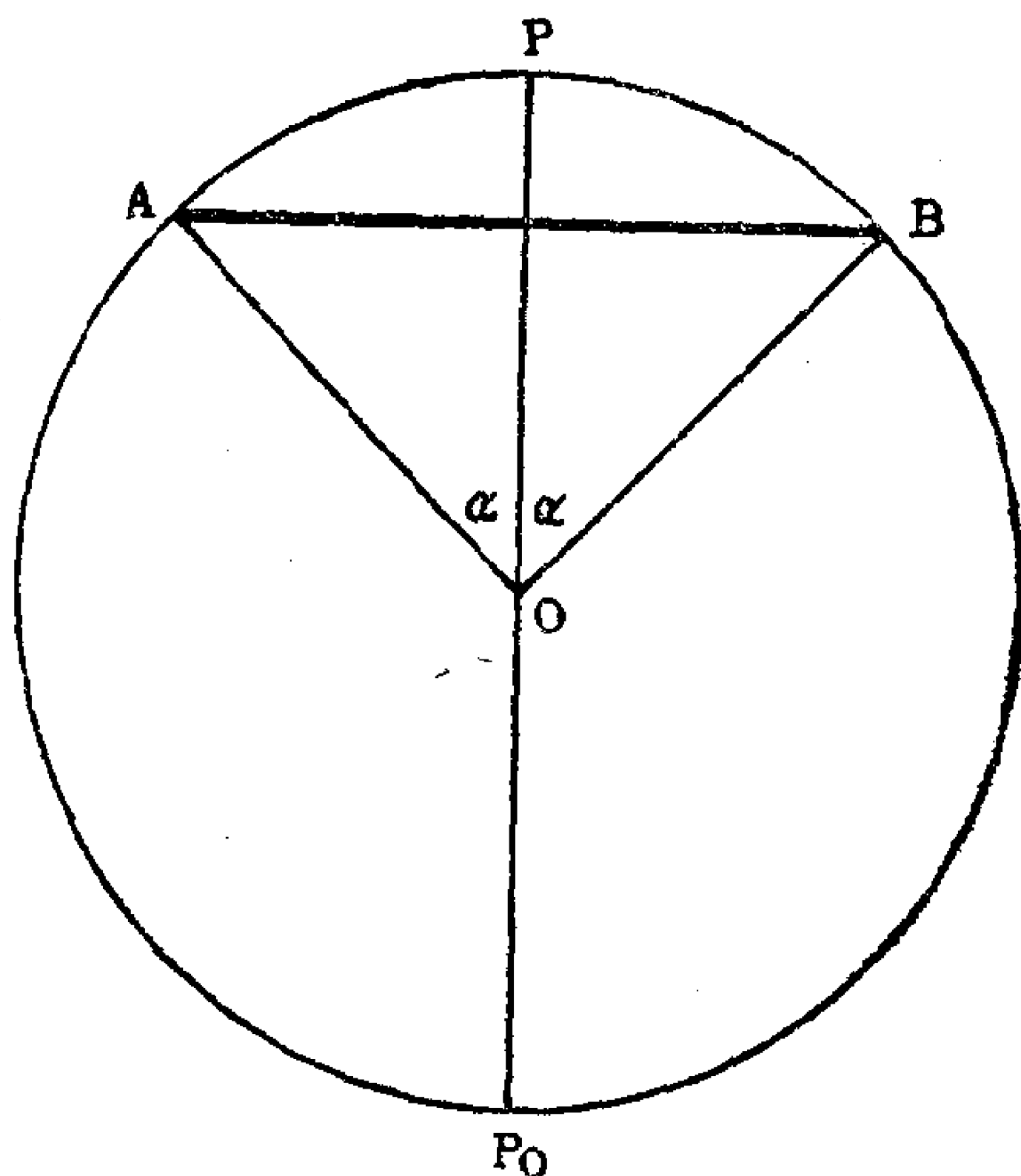


圖 9

(i) 在投影面圓周取 A 、 B 二點，使 $\widehat{POA} = \widehat{POB} = \alpha^\circ$ ；

(ii) 連 AB ， AB 為所求的圓投影。

設圓的極的投影 P 在投影面中心(圖10)。

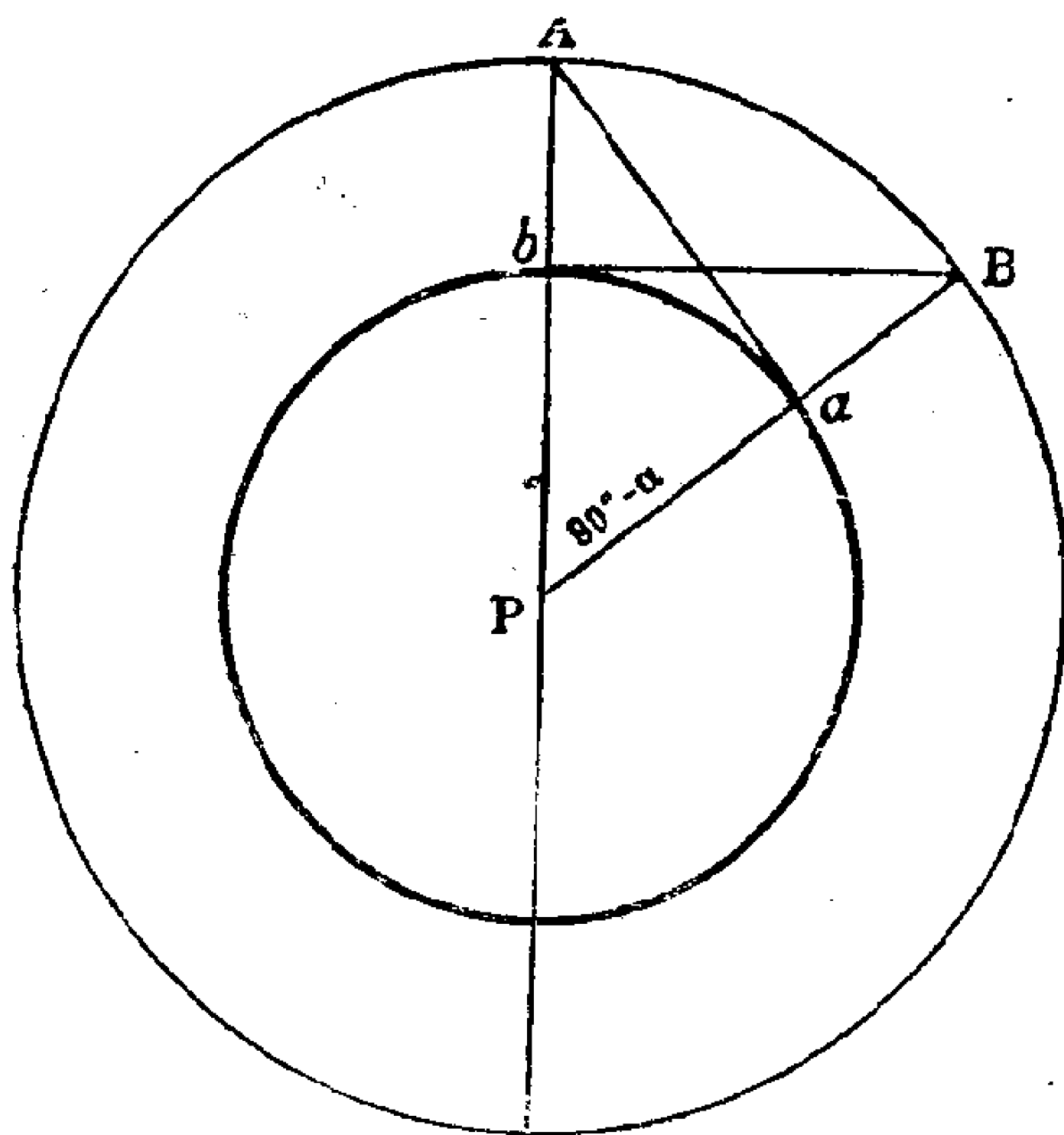


圖 10

- (i) 在投影面圓周取 A, B 二點，使 $\angle APB = 90^\circ - \alpha^\circ$ ；
(ii) 自 B 作 Bb 垂直於 PA ，交 PA 於 b ；或自 A 作 Aa 垂直於

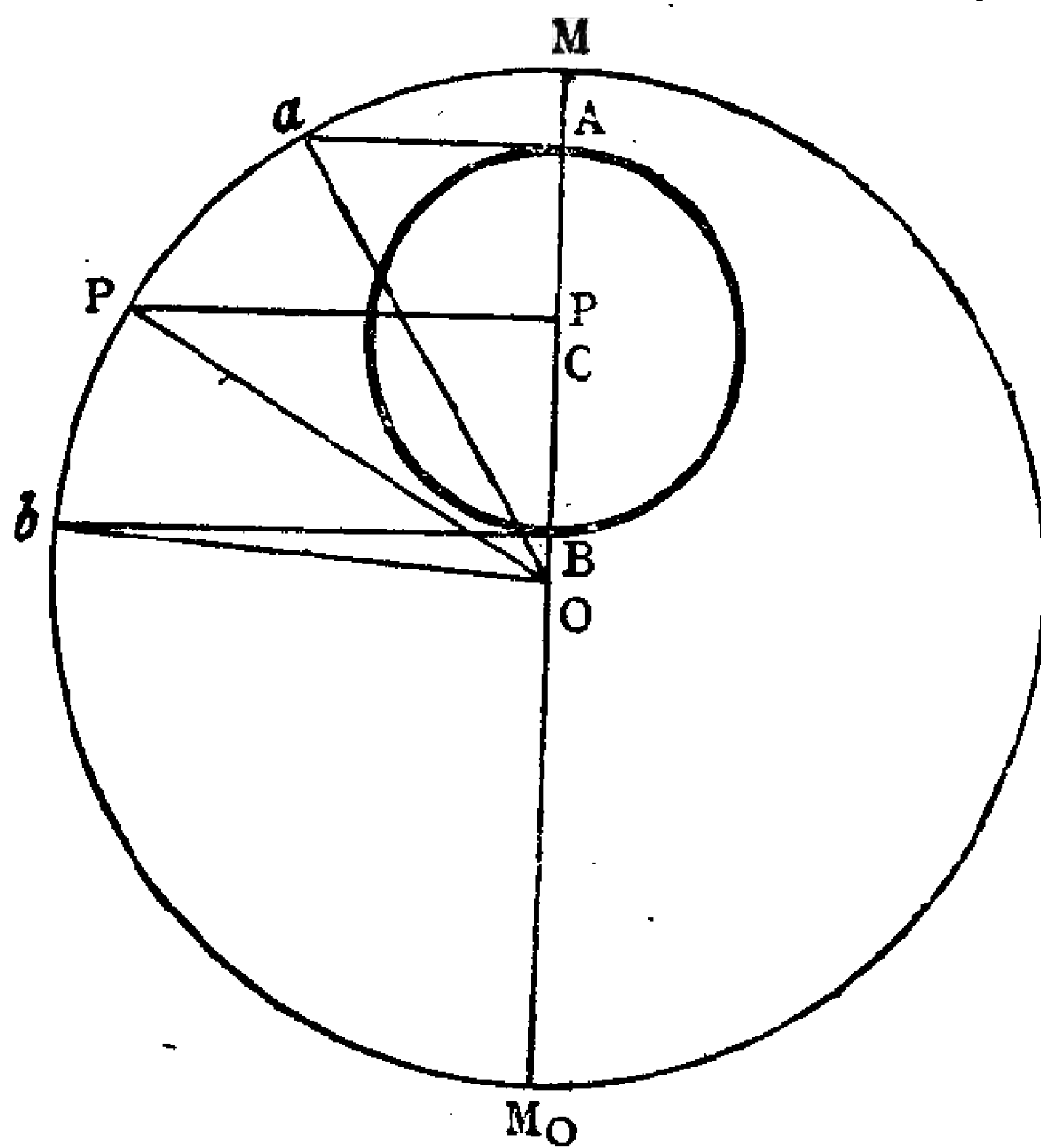


圖 11

PB , 交 PB 于 a ;

(iii) 以 P 为中心, Pa (或 Pb) 为半径作圆, 该圆为所求的圆投影。

设圆的极的投影 P 在投影面上任意点 (图 11)。

(i) 经 P 作直径 MPM_0 ;

(ii) 作 Pp 垂直于 MM_0 , 并交投影面圆周于 p ;

(iii) 取 $\widehat{pa} = \widehat{pb} = \alpha^\circ$, 由 a 及 b 作 aA 及 bB 垂直于 MM_0 , 交 MM_0 于 A 及 B ;

(iv) 以 AB 为直径作圆, 该圆为所求的圆投影。

b. 作与投影面成 α° 交角的大圆投影。

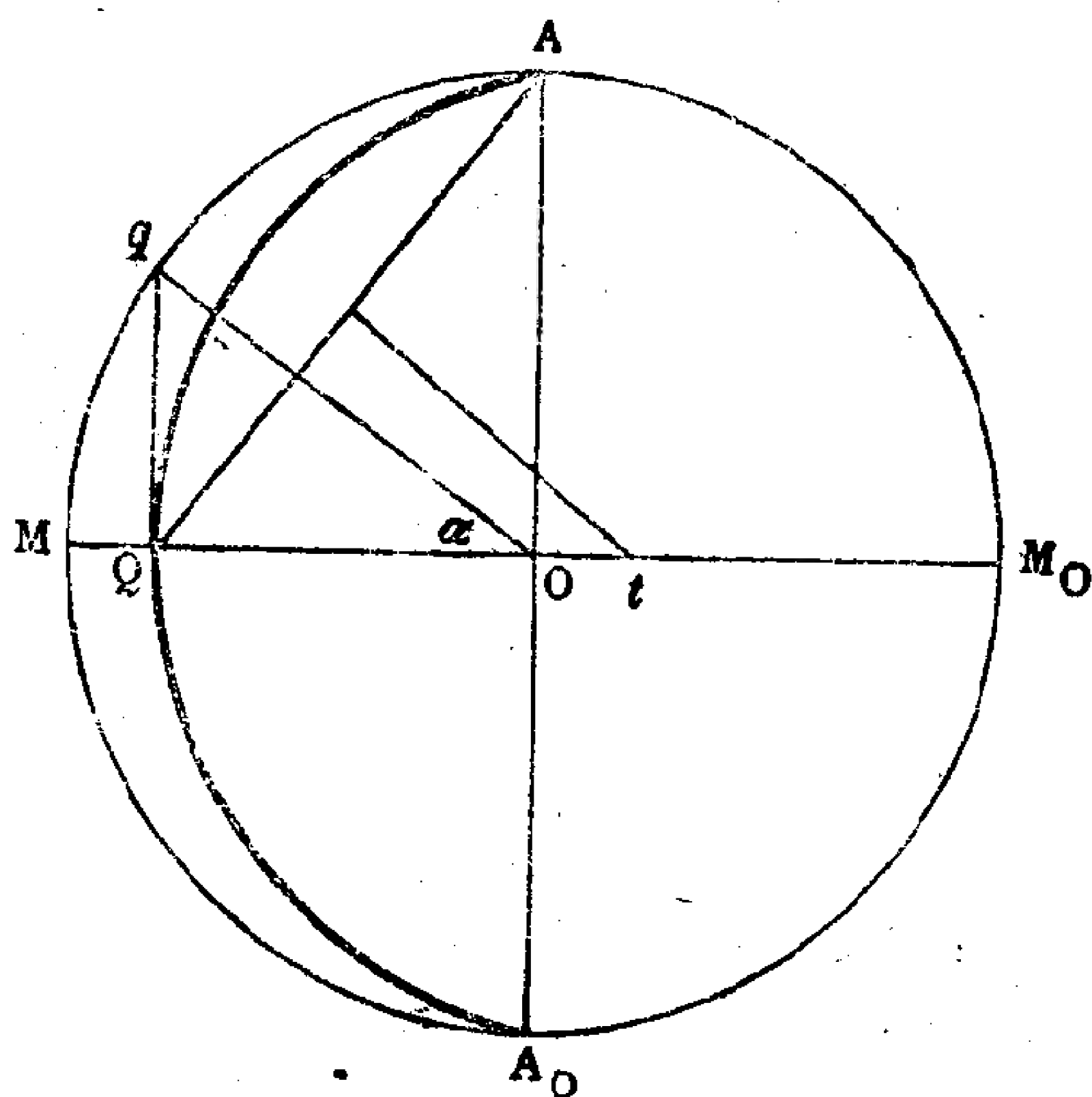


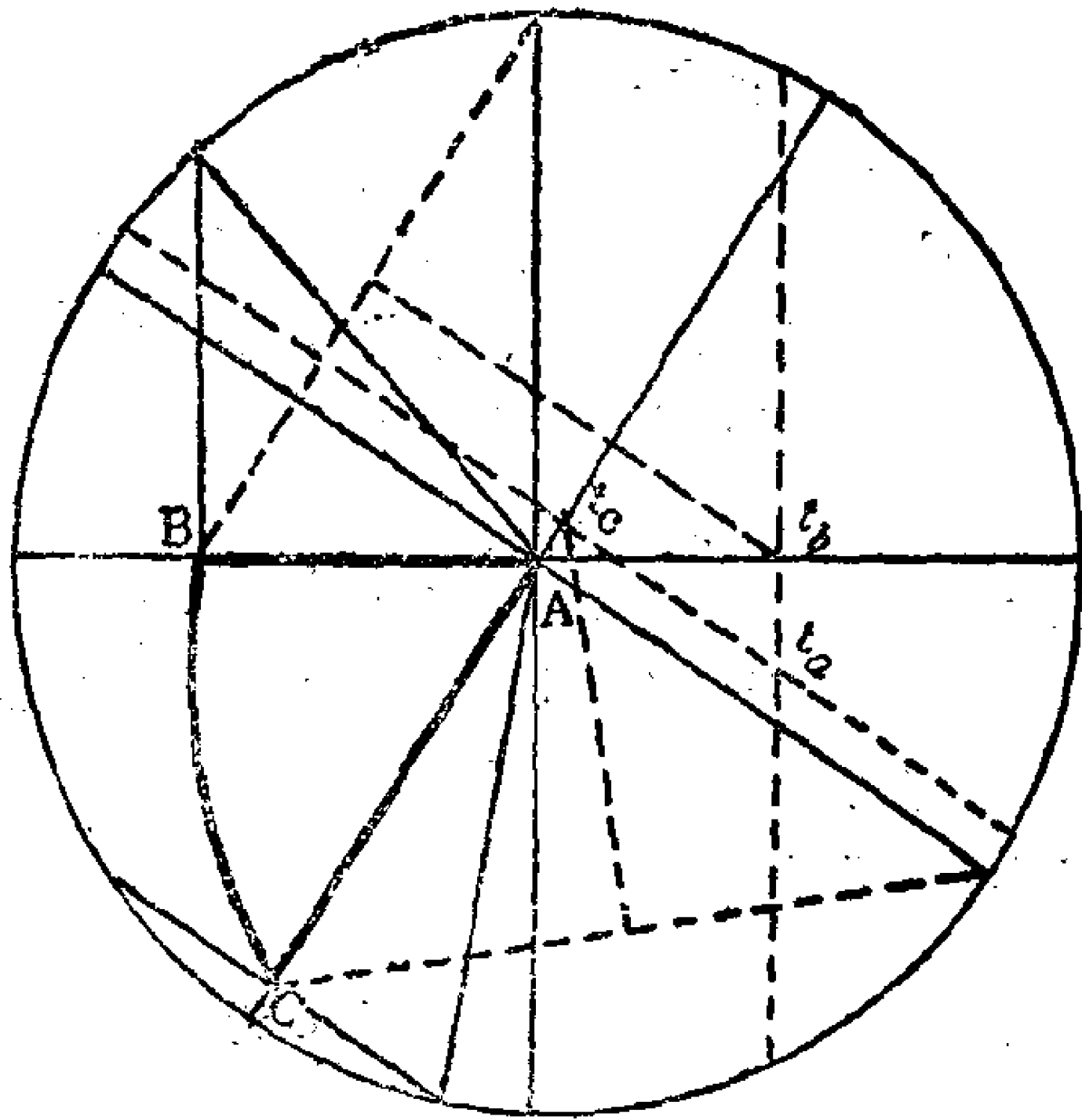
图 12

(i) 在投影面圆周取任意点 A (图 12), 作直径 AA_0 、 MM_0 相互垂直;

(ii) 取 $\widehat{Mq} = \alpha^\circ$, 并由 q 作 qQ 垂直于 MM_0 , 交 MM_0 于 Q ;

(iii) 作 AQ (或 A_0Q) 的垂直平分线, 交 MM_0 于 t ;

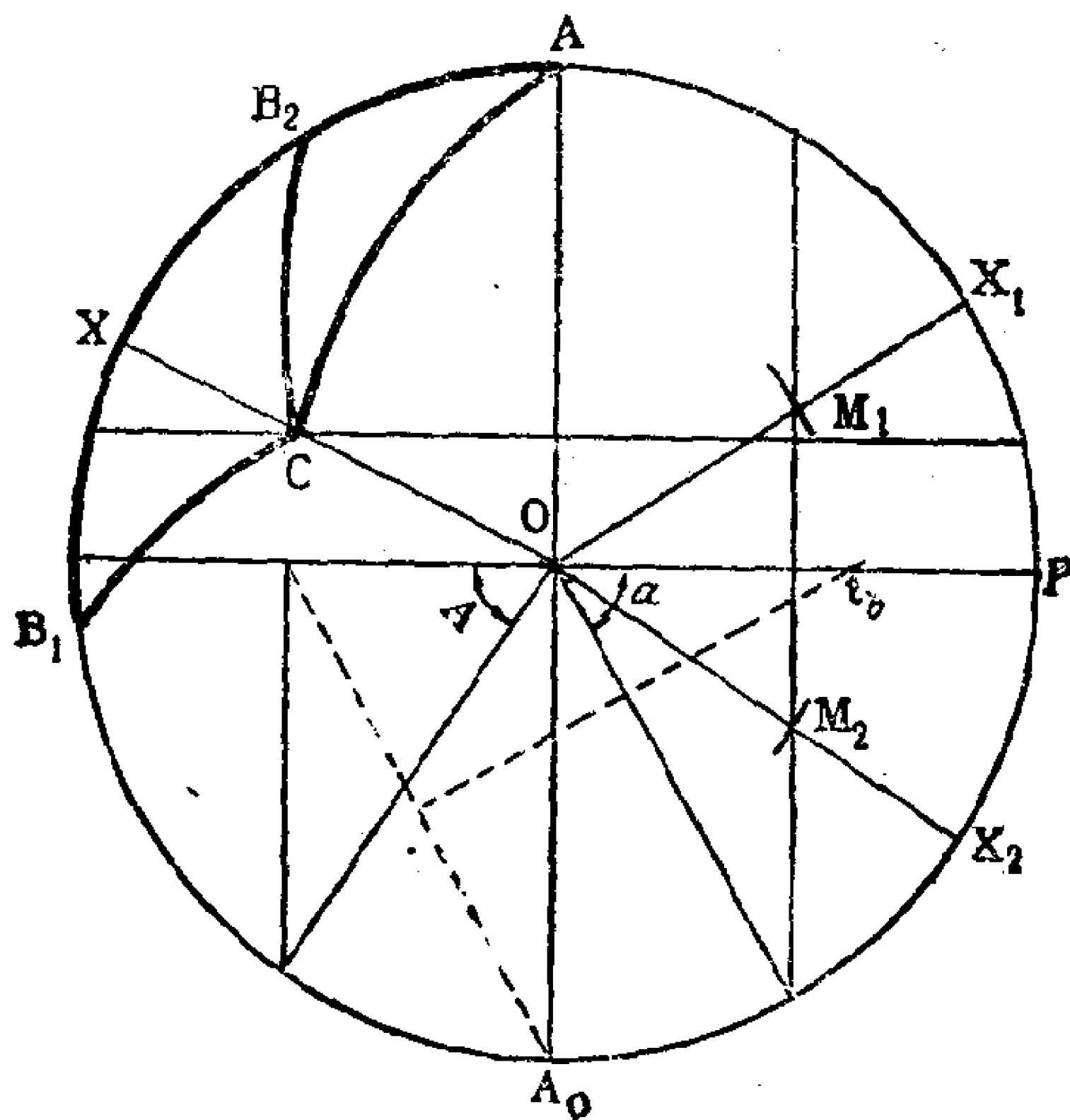
(iv) 以 t 为中心, tQ 为半径作圆弧 AQA_0 , AQA_0 为所求的大圆投影。



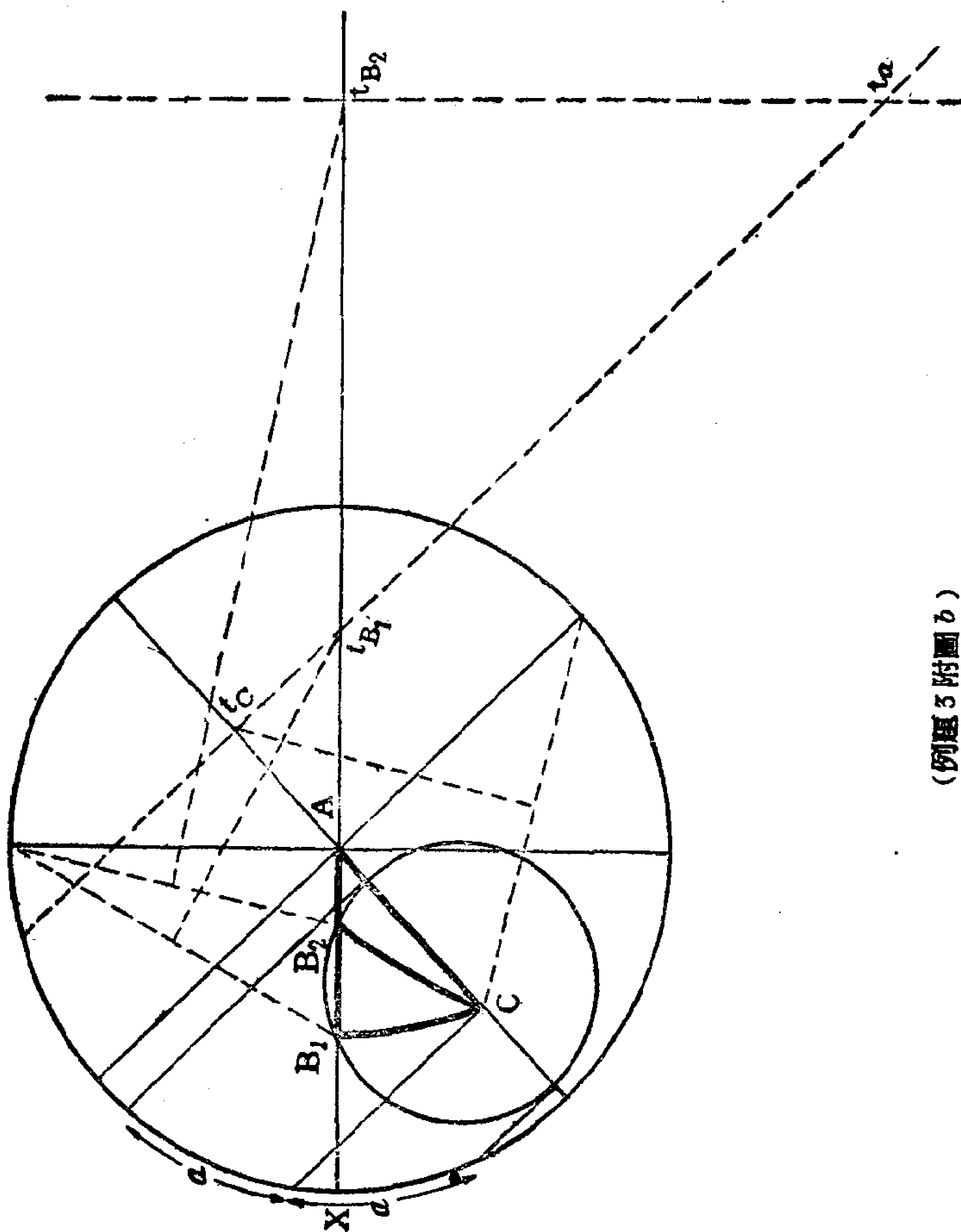
(例題 2 附圖 b)

例題 3. 已知球面三角形的二邊 a 、 b 及其一边的對角 A ，作該球面三角形圖。

解 設選用球面三角形的 C 邊的大圓為投影面圓周。



(例題 3 附圖 a)



(例題 3 附圖 b)

(i) 以 O 为中心作投影面圓周，并在其上取一点 A ；由 A 作大圓弧 \widehat{AC} 的投影，使 $\widehat{AC}=b$ 并与投影面圓周成 A 角；

(ii) 在投影面圓周上取任意点 p ；以 p 为極， a 为極距，作該圓弧的投影；

(iii) 以 O 为中心， OC 为半径作弧，交所作的圓弧投影于 m_1 及 m_2 ；

(iv) 連 OC 、 Om_1 、 Om_2 ，分別交投影面圓周于 x 、 x_1 、 x_2 ；

(v) 在 x 的兩旁沿投影面圓周取 $xB_1=x_1p$ ， $xB_2=x_2p$ ；

(vi) 作大圓弧 $\widehat{B_1C}$ 及 $\widehat{B_2C}$ 的投影，于是 AB_1C 及 AB_2C 为所求的球面三角形(但必須注意，只有 B 点在 $\widehat{AXA_0}$ 範圍內所成的球面三角形圖形才是通解所要求的)。

設选用球面三角形的頂点 A 为投影面圓心。

(i) 以 A 为中心作投影面圓周；

(ii) 作 $AC=b$ ，并作 Ax ，使 $\widehat{CAx}=A$ ；

(iii) 以 C 为極， a 为極距，作該圓弧的投影，交 Ax 于 B_1 及 B_2 ；

(iv) 作大圓弧 $\widehat{B_1C}$ 及 $\widehat{B_2C}$ 的投影，于是 AB_1C 及 AB_2C 为所求的球面三角形。

第二章 球面三角

§4. 球面任意三角形

4.1 球面三角形基本公式的证明

球面三角学的主要任务是研究球面三角形要素间的相互关系，并将这种关系用方程式表达出来。用以表达球面三角形要素关系的方程式叫作球面三角公式。当具有足够的条件时，这样的公式可用以解球面三角形。

球面三角公式中的球面正弦公式、球面五联关系式、球面余弦公式常被称为球面三角基本公式。以这三个公式为基础，可以导出其余的球面三角公式。

设以球面三角形 ABC 的球心 O 作为直角三轴座标（右手系）的原点， OA 为 Z 轴， Y 轴 OY 在 AOB 平面， X 轴垂直于 AOB 平面（图14），于是球面三角形 AEC 的顶点 C 的座标为 x, y, z 。

今将 Z 轴在 AOB 平面上旋转一个角度 C ，使 OB 叠于 OZ ，并称 OB 为 Z' 轴，则在新的座标系中， Y' 轴 OY' 与 OY 的交角为 C ，而 X' 轴 OX' 则与 OX 相叠，于是顶点 C 的座标为 x', y', z' 。

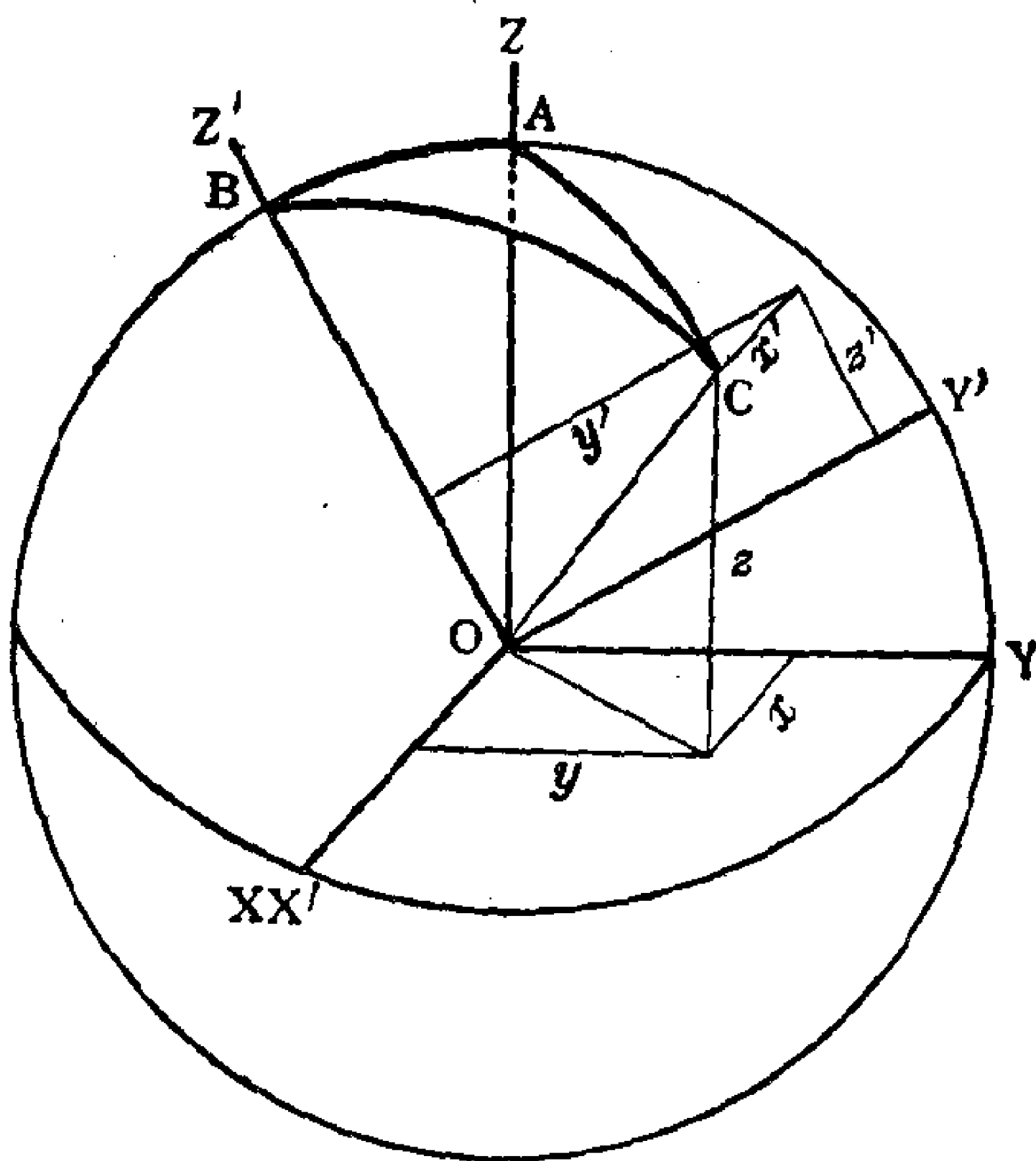


图 14

根据座标变换的关系得

$$x' = x, \quad y' = y \cos c + z \sin c, \quad z' = -y \sin c + z \cos c$$

但座标与球面三角形要素的关系是

$$x = OC \cdot \sin b \cdot \sin A, \quad y = -OC \cdot \sin b \cdot \cos A, \quad z = OC \cdot \cos b.$$

$$x' = OC \cdot \sin a \cdot \sin B, \quad y' = OC \cdot \sin a \cdot \cos B, \quad z' = OC \cdot \cos a.$$

將它們分別代入上面三个式中，則得

$$\left. \begin{aligned} \sin a \cdot \sin B &= \sin b \cdot \sin A \\ \sin a \cdot \cos B &= \cos b \cdot \sin c - \sin b \cdot \cos c \cdot \cos A \\ \cos a &= \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} * 1 \\ * 2 \\ * 3 \end{array}$$

式 * 1 叫作球面正弦公式，它含有球面三角形中四个要素，即两个角和这两个角所对的边，任一个角正弦与其所对的边正弦的比，等于另一个角正弦与其所对的边正弦的比，即

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} \quad (1)$$

式 * 2 叫作球面五联关系式，它含有球面三角形中五个相联的要素，即三个边和两个角，一个外边正弦与其鄰角余弦的乘积，等于另一外边余弦与内边正弦的乘积减去这个外边正弦、内边余弦及这两边夹角余弦的連乘积，即

$$\left. \begin{aligned} \sin a \cdot \cos B &= \cos b \cdot \sin c - \sin b \cdot \cos c \cdot \cos A \\ \sin a \cdot \cos C &= \cos c \cdot \sin b - \sin c \cdot \cos b \cdot \cos A \\ \sin b \cdot \cos A &= \cos a \cdot \sin c - \sin a \cdot \cos c \cdot \cos B \\ \sin b \cdot \cos C &= \cos c \cdot \sin a - \sin c \cdot \cos a \cdot \cos B \\ \sin c \cdot \cos A &= \cos a \cdot \sin b - \sin a \cdot \cos b \cdot \cos C \\ \sin c \cdot \cos B &= \cos b \cdot \sin a - \sin b \cdot \cos a \cdot \cos C \end{aligned} \right\} (2)$$

式 * 3 叫作球面余弦公式，它含有球面三角形中四个要素，即三个边和一个角，一个边的余弦，等于其余两个边余弦的乘积加上这两个边正弦和它的夹角余弦的連乘积，即

$$\left. \begin{aligned} \cos a &= \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A \\ \cos b &= \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos B \\ \cos c &= \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C \end{aligned} \right\} (3)$$

4.2 球面正弦公式

上节已经证明球面正弦公式是球面三角形任一个角正弦与其所对的边正弦的比等于另一个角正弦与其所对的边正弦的比。只要已知球面三角形的两个边和其中一个边的对角，或两个角和其中一个角的对边，就可以用球面正弦公式求另一个对角或对边的值。但必须注意，由正弦函数求值，所得的两个互为补角的解不是在任何情况下都能适合所解的球面三角形。因此，判定适合的解就成为采用球面正弦公式求值所必须考虑的问题。

a. 设已知球面三角形的两个边 a, b 及角 A ，由球面正弦公式得

$$\sin B = \frac{\sin b \cdot \sin A}{\sin a}$$

可以肯定，当 $\sin a < \sin b \cdot \sin A$ 时 $\sin B > 1$ ，但 $\sin B$ 不可能大于一，所以 B 没有解；当 $\sin a = \sin b \cdot \sin A$ 时， $\sin B = 1$ ，所以 B 只有一个解即 $B = 90^\circ$ ；当 $\sin a > \sin b \cdot \sin A$ 时， $\sin B < 1$ ， B 的解有如下几种情况。

第一种情况： $A < 90^\circ, b < 90^\circ$ 。

$a < b$ 两解 $B_1 = B, B_2 = 180^\circ - B$;

$180^\circ - b > a \geq b$ 一解 $B \leq A$;

$180^\circ - b \leq a < b$ 无解。

第二种情况： $A < 90^\circ, b > 90^\circ$ ，

$180^\circ - b > a < b$ 两解 $B_1 = B, B_2 = 180^\circ - B$;

$180^\circ - b \leq a < b$ 一解 $180^\circ - A < B < A$;

$a \geq b$ 无解。

第三种情况： $A > 90^\circ, b < 90^\circ$ ，

$a \leq b$ 无解；

$180^\circ - b \geq a > b$ 一解 $A > B < 180^\circ - A$;

$180^\circ - b < a > b$ 两解 $B_1 = B, B_2 = 180^\circ - B$ 。

第四种情况： $A > 90^\circ, b > 90^\circ$ ，

$180^\circ - b \geq a > b$ 无解；

$180^\circ - b < a \leq b$ 一解 $B \geq A$;

$a > b$ 两解 $B_1 = B, B_2 = 180^\circ - B$ 。

b. 設已知球面三角形的兩個角 A, B 及邊 a , 由球面正弦公式得

$$\sin b = \frac{\sin B \cdot \sin a}{\sin A}$$

當 $\sin A < \sin B \cdot \sin a$ 時, $\sin b > 1$, 但 $\sin b$ 不可能大于一, 所以 b 沒有解; 當 $\sin A = \sin B \cdot \sin a$ 時, $\sin b = 1$, 所以 b 只有一個解, 即 $b = 90^\circ$; 當 $\sin A > \sin B \cdot \sin a$ 時, B 的解有如下幾種不同情況。

第一種情況: $a < 90^\circ, B < 90^\circ$
 $A < B$ 兩解 $b_1 = b, b_2 = 180^\circ - b$;
 $180^\circ - B > A \geq B$ 一解 $b \leq a$;
 $180^\circ - B \leq A < B$ 無解。

第二種情況: $a < 90^\circ, B > 90^\circ$
 $180^\circ - B > A < B$ 兩解 $b_1 = b, b_2 = 180^\circ - b$;
 $180^\circ - B \leq A < B$ 一解 $180^\circ - a < b < a$;
 $A \geq B$ 無解。

第三種情況: $a > 90^\circ, B < 90^\circ$
 $A \leq B$ 無解;
 $180^\circ - B \geq A > B$ 一解 $180^\circ - a > a < a$;
 $180^\circ - B < A > B$ 兩解 $b_1 = b, b_2 = 180^\circ - b$ 。

第四種情況: $a > 90^\circ, B > 90^\circ$
 $180^\circ - B \geq A < B$ 無解
 $180^\circ - B < A \leq B$ 一解 $b \geq a$;
 $A > B$ 兩解 $b_1 = b, b_2 = 180^\circ - b$ 。

從上面各種情況看來, 判定正弦函數所求的值是比較複雜。因此, 除非不得已, 解球面三角形應當儘量避免採用正弦函數定值。

例題 4. 設球面三角形 ABC , $a = 114^\circ 29'.2$, $b = 69^\circ 47'.7$, $A = 134^\circ 19'.3$, 求 B 角的值。

解 由球面正弦公式(1)得 $\sin B = \frac{\sin b}{\sin a} \cdot \sin A$,

今 $A > 90^\circ, b < 90^\circ$, 而 $180^\circ - b < a > b$, 故知 B 有二解。

$$A = 134^\circ 19'.3$$

$$L \sin 9.854 \ 56$$

$$b = 69^\circ 47'.7$$

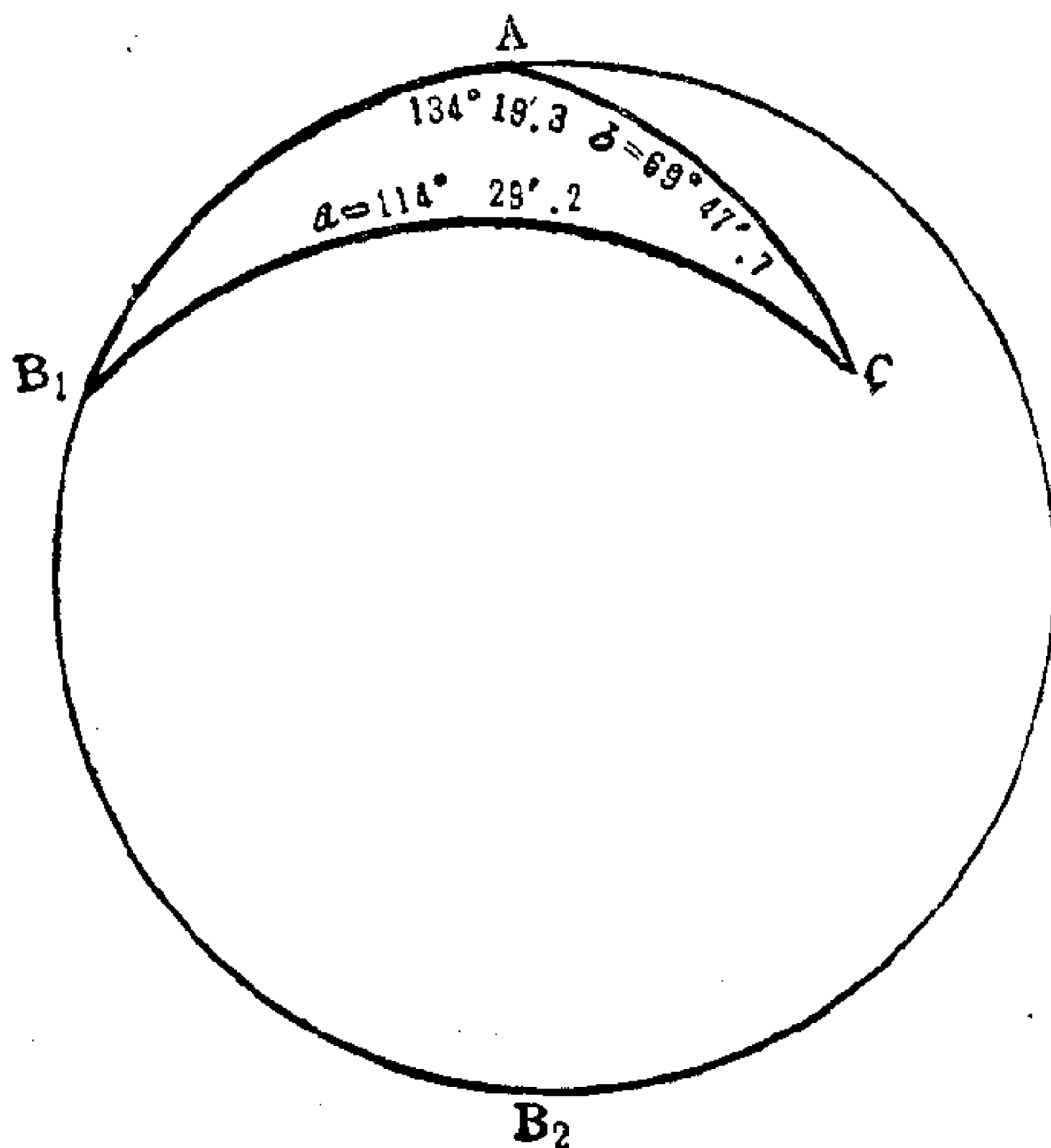
$$L \sin 9.972 \ 42$$

$$a=114^{\circ}29'.2$$

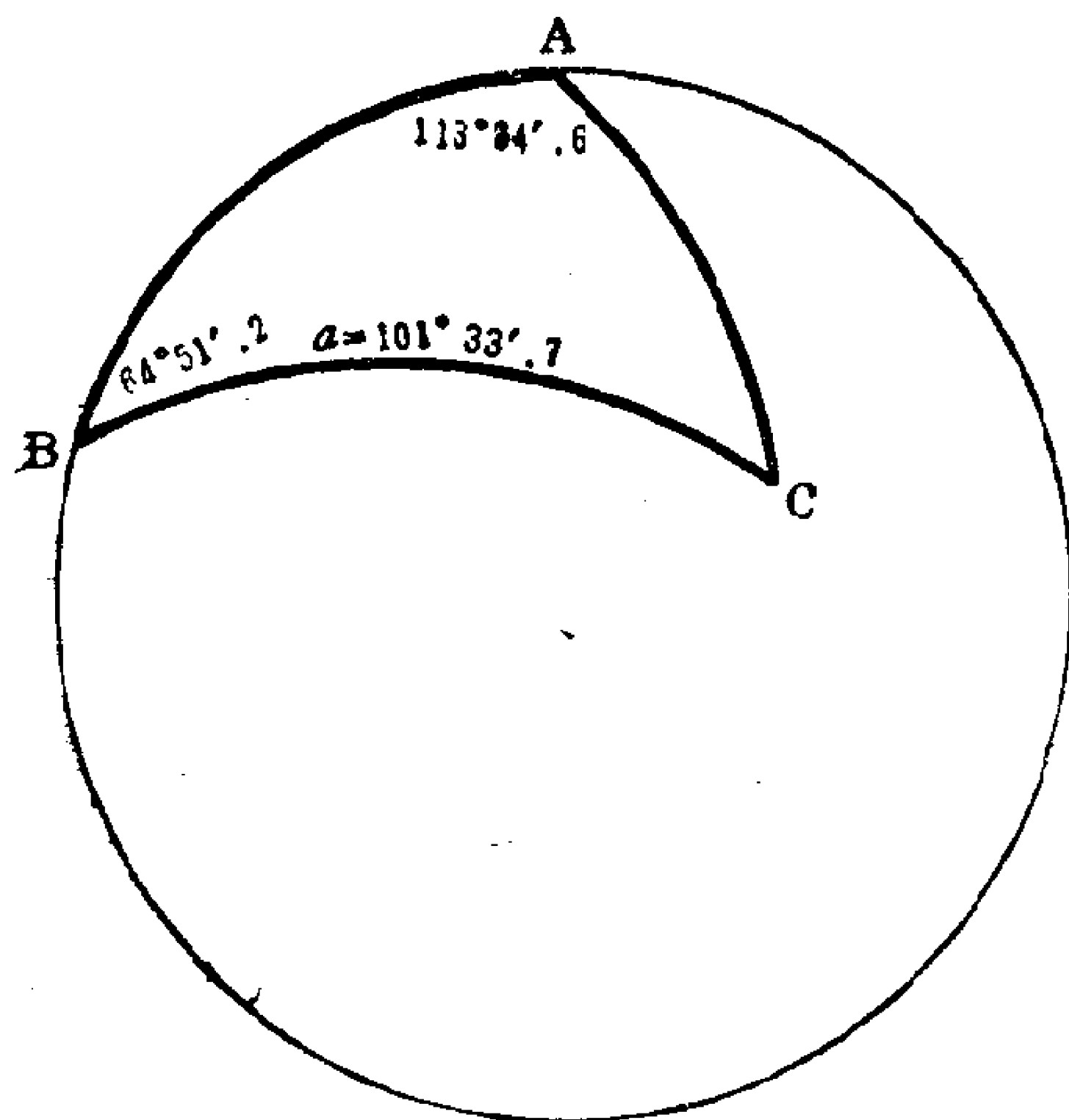
$$B_1=47^{\circ}32'.4$$

$$B_2=132^{\circ}27'.6$$

$$\frac{L\csc 9.040\ 93}{L\sin 9.867\ 91}$$



(例題4附圖)



(例題5附圖)

例題5. 設球面三角形 ABC ,
 $A=113^{\circ}24'.6$, $B=64^{\circ}51'.2$,
 $a=101^{\circ}33'.7$, 求 b 边的值。

解 由球面正弦公式(1)得

$$\sin b = \frac{\sin B}{\sin A} \cdot \sin a$$

今 $a > 90^{\circ}$, $B < 90^{\circ}$, 而
 $180^{\circ} - B > A > B$, 故知 B 只
 有一解, 且 $180^{\circ} - a > b < a$ 。

$$a=101^{\circ}33'.7 \quad L\sin 9.991\ 10$$

$$B=64^{\circ}51'.2 \quad L\sin 9.956\ 75$$

$$A=113^{\circ}24'.6 \quad \frac{L\csc 0.037\ 31}{L\sin 9.985\ 16}$$

$$b=75^{\circ}06'.5$$

4.3 球面五联关系式、球面四联关系式

§4 第1节所证明的球面五联关系式(2)仅含有球面三角形的三个边和两个角等五个相联的要素,对于球面三角形的三个角及两个边的五个相联要素的关系式,可以通过极线三角形的关系,由式(2)导出,即

$$\left. \begin{aligned} \sin A \cdot \cos b &= \cos B \cdot \sin C + \sin B \cdot \cos C \cdot \cos a \\ \sin A \cdot \cos c &= \cos C \cdot \sin B + \sin C \cdot \cos B \cdot \cos a \\ \sin B \cdot \cos a &= \cos A \cdot \sin C + \sin A \cdot \cos C \cdot \cos b \\ \sin B \cdot \cos c &= \cos C \cdot \sin A + \sin C \cdot \cos A \cdot \cos b \\ \sin C \cdot \cos a &= \cos A \cdot \sin B + \sin A \cdot \cos B \cdot \cos c \\ \sin C \cdot \cos b &= \cos B \cdot \sin A + \sin B \cdot \cos A \cdot \cos c \end{aligned} \right\} \quad (2a)$$

由上面的式子可以看出,球面三角形的三个角及两个边等五个相联要素的关系是一个外角正弦与其邻边余弦乘积,等于另一外角余弦与内角正弦乘积加上这个外角正弦内角余弦及这两个角的夹边余弦连乘积。

球面五联关系式(2a)有

$$\sin A \cdot \cos b = \cos B \cdot \sin C + \sin B \cdot \cos C \cdot \cos a$$

今以 $\sin B$ 除上式的各项得

$$\frac{\sin A}{\sin B} \cdot \cos b = \operatorname{ctg} B \cdot \sin C + \cos C \cdot \cos a$$

但

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin a}{\sin b}$$

代入则得 $\operatorname{ctg} b \cdot \sin a = \operatorname{ctg} B \cdot \sin C + \cos C \cdot \cos a$

这个式子含有球面三角形的四个相联要素,因此叫作球面四联关系式,它的外边余切与内边正弦的乘积,等于外角余切与内角正弦的乘积加上内角余弦与内边余弦的乘积,即

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ctg} a \cdot \sin b &= \operatorname{ctg} A \cdot \sin C + \cos C \cdot \cos b \\ \operatorname{ctg} a \cdot \sin c &= \operatorname{ctg} A \cdot \sin B + \cos B \cdot \cos c \\ \operatorname{ctg} b \cdot \sin a &= \operatorname{ctg} B \cdot \sin C + \cos C \cdot \cos a \\ \operatorname{ctg} b \cdot \sin c &= \operatorname{ctg} B \cdot \sin A + \cos A \cdot \cos c \\ \operatorname{ctg} c \cdot \sin a &= \operatorname{ctg} C \cdot \sin B + \cos B \cdot \cos a \\ \operatorname{ctg} c \cdot \sin b &= \operatorname{ctg} C \cdot \sin A + \cos A \cdot \cos b \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

球面四联关系式經移項之后，可用于解球面三角形四个相联要素的外边或外角，实际上这也就是已知球面三角形的二角及其夾边解其余二边，或已知二边及其夾角解其余二角。例如：

$$\operatorname{ctga} = \operatorname{ctg} A \cdot \sin B \cdot \operatorname{csc} C + \cos B \cdot \operatorname{ctg} C$$

$$\operatorname{ctgb} = \operatorname{ctg} B \cdot \sin A \cdot \operatorname{csc} C + \cos A \cdot \operatorname{ctg} C$$

$$\operatorname{ctg} A = \operatorname{ctga} \cdot \sin b \cdot \operatorname{csc} C - \cos b \cdot \operatorname{ctg} C$$

$$\operatorname{ctg} B = \operatorname{ctgb} \cdot \sin a \cdot \operatorname{csc} C - \cos a \cdot \operatorname{ctg} C$$

但是，这些算式不是对数式，演算很不便利，应当避免使用。如果必須用到这个公式进行計算时，除了用和差对数計算表外^①，也可采用輔助角的方法，以簡化演算手續。

例題 6. 設球面三角形 ABC ， $A=55^{\circ}42'$ ， $B=49^{\circ}21'$ ， $C=110^{\circ}15'$ ，求 a 边的值。

① 和差对数計算表是根据下列关系而設計的。由代数学已知

$$X \pm Y = X \left(1 \pm \frac{1}{\frac{X}{Y}} \right)$$

故 $\log(X \pm Y) = \log x + \log \left(1 \pm \frac{1}{\frac{X}{Y}} \right)$

命 $\alpha = \log \left(1 + \frac{1}{\frac{X}{Y}} \right)$ ， $\beta = \log \left(1 - \frac{1}{\frac{X}{Y}} \right)$ ：

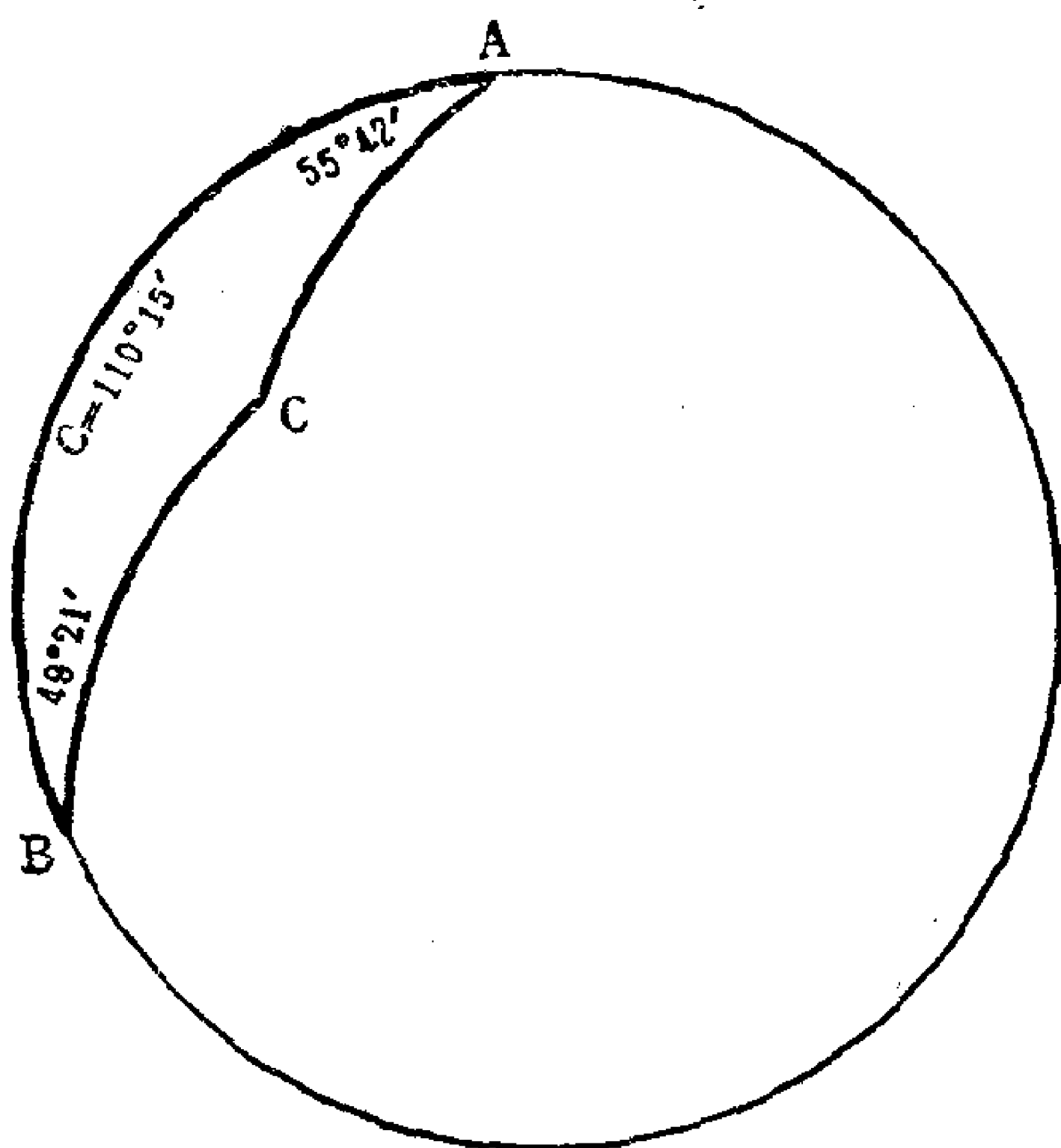
$\therefore \log(x+y) = \log x + \alpha$

$\log(x-y) = \log x + \beta$

和差对数計算表以 $(\log x - \log y)$ 为引数，在 α 表給出 $\log \left(1 + \frac{1}{\frac{X}{Y}} \right)$

的值，在 β 表給出 $\log \left(1 - \frac{1}{\frac{X}{Y}} \right)$ 的值。

解



(例題 6 附圖)

由球面四联关系式(4)

$$\operatorname{ctg} a = \operatorname{ctg} A \cdot \sin B \cdot \operatorname{csc} c + \cos B \cdot \operatorname{ctg} c$$

以 M_a 为輔助角并命

$$\operatorname{ctg} A \cdot \operatorname{csc} c = \operatorname{ctg} M_a \cdot \operatorname{ctg} c$$

即

$$\operatorname{tg} M_a = \operatorname{tg} A \cdot \cos c$$

于是

$$\operatorname{ctg} a = \operatorname{ctg} c \cdot \operatorname{csc} M_a \cdot \sin(B + M_a)$$

$$A = 55^\circ 42' \quad L \operatorname{tg} 0.16612$$

$$C = 110^\circ 15' \quad \underline{L \cos 9.53922 \text{ } n} \quad L \operatorname{ctg} 9.56693 \text{ } n$$

$$M_a = 153^\circ 05'.8 \quad L \operatorname{tg} 9.70534 \text{ } n \quad L \operatorname{csc} 0.34440$$

$$B = 49^\circ 21'.0$$

$$B + M_a = 202^\circ 26'.8 \quad \underline{L \sin 9.58186 \text{ } n}$$

$$a = 72^\circ 42'.5 \quad L \operatorname{ctg} 9.49319$$

本例題亦可用“和差对数計算表”計算，計算方法如下：

由球面四联关系式(4)

$$\text{ctga} = \text{ctg}^+ A \cdot \sin^+ B \cdot \text{csc}^+ C + \cos^+ B \cdot \text{ctg}^- C = + \text{I} - \text{II}$$

$$A = 55^\circ 42' \quad \text{Lctg } 9.83388$$

$$B = 49^\circ 21' \quad \text{Lsin } 9.88007 \quad \text{Lcos } 9.81387$$

$$C = 110^\circ 15' \quad \underline{\text{Lcsc } 0.02771} \quad \underline{\text{Lctg } 9.56693 n}$$

$$9.74166$$

$$9.38080$$

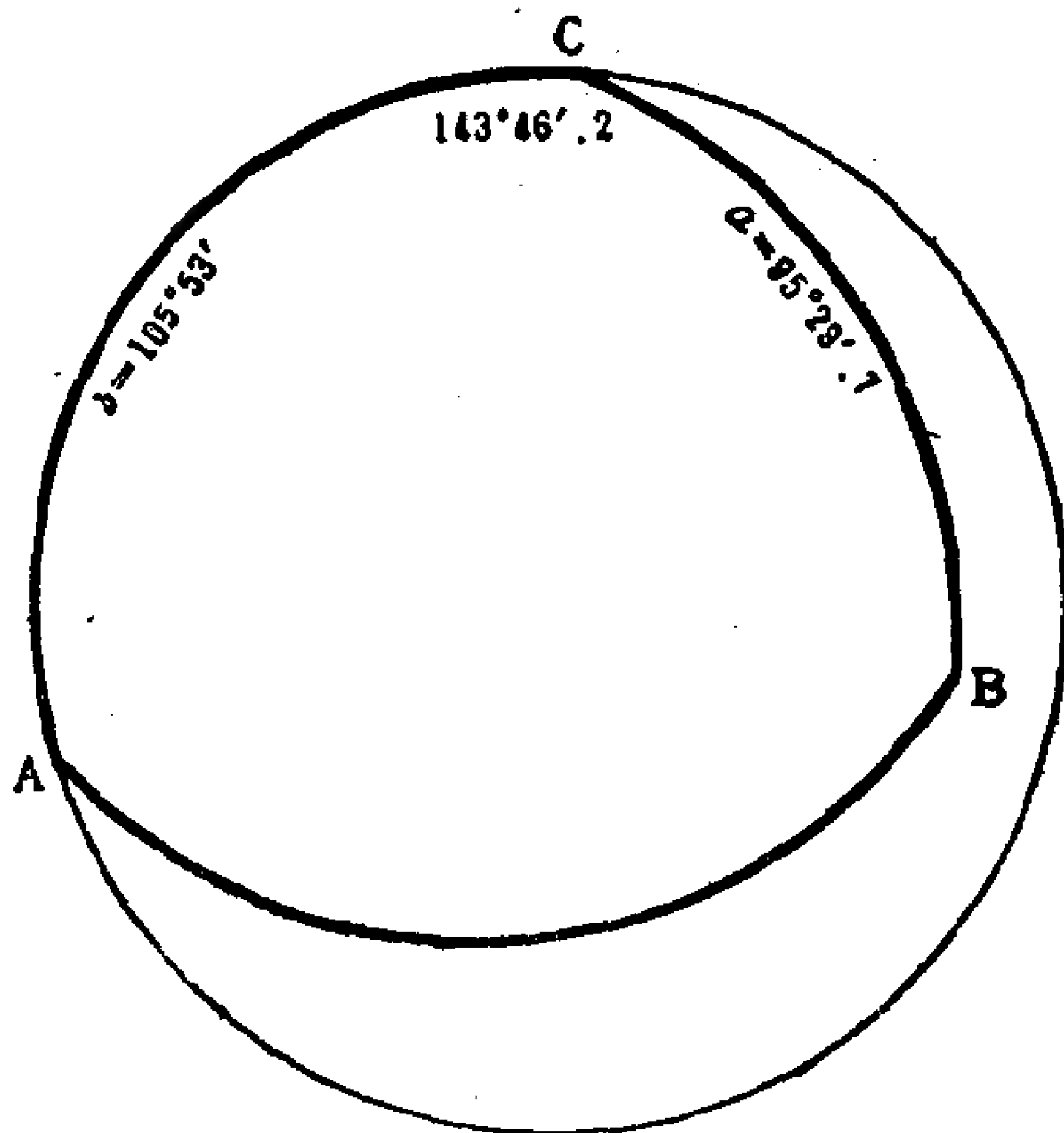
$$\underline{\beta \ 9.75155} \quad + \text{I} - \text{II} \ 0.36086$$

$$a = 72^\circ 42'.4 \quad \text{Lctg } 9.49321$$

例題 7. 設球面三角形 ABC , $a = 95^\circ 29'.7$, $b = 105^\circ 53'$, $C = 143^\circ 46'.2$,

求 A 角的值。

解



(例題 7 附圖)

由球面四联关系式(4) $\text{ctg} A = \text{ctg} a \cdot \sin b \cdot \csc C - \cos b \cdot \text{ctg} C$

命 $\text{ctg} a \cdot \csc C = \text{ctg} M_A \cdot \text{ctg} C$

即 $\text{tg} M_A = \text{tg} a \cdot \cos C$

于是 $\text{ctg} A = \text{ctg} C \cdot \csc M_A \cdot \sin(b - M_A)$

$$\begin{array}{llll}
 a=95^{\circ}29'.7 & L \text{tg} & 1.01632 \text{ n} & \\
 C=143^{\circ}46'.2 & L \cos & 9.90669 \text{ n} & L \text{ctg} \quad 0.13507 \text{ n} \\
 M_A=83^{\circ}11'.9 & L \text{tg} & 0.92351 & L \csc \quad 0.00307 \\
 b=105^{\circ}53'.0 & & & \\
 b-M_A=22^{\circ}41'.1 & & & L \sin \quad 9.58621 \\
 A=117^{\circ}55'.7 & & & L \text{ctg} \quad 9.72435 \text{ n}
 \end{array}$$

本例题用“和差对数计算表”的计算如下:

由球面四联关系式(4)

$$\begin{array}{llll}
 \text{ctg} A = \text{ctg} a \cdot \sin b \cdot \csc C - \cos b \cdot \text{ctg} C = -I - II \\
 a=95^{\circ}29'.7 & L \text{ctg} & 8.98318 \text{ n} & \\
 b=105^{\circ}53'.0 & L \sin & 9.98309 & L \cos \quad 9.43724 \text{ n} \\
 C=143^{\circ}46'.2 & L \csc & 0.22839 & L \text{ctg} \quad 0.13508 \text{ n} \\
 & & 9.19466 \text{ n} & 9.57232 \\
 & -I-II & 0.37766 & \alpha \quad 0.15202 \text{ n} \\
 A=117^{\circ}55'.6 & & & L \text{ctg} \quad 9.72434 \text{ n}
 \end{array}$$

4.4 球面余弦公式

球面余弦公式有四种不同的写法,而每种写法均有其单独的意义。公式(3)是指球面三角形一个边的余弦,等于其余两个边余弦乘积加上这两个边正弦和它的夹角余弦的连乘积。今将公式(3)移项之后,则写成球面三角形一个角的余弦,等于这个角的对边余弦减去邻边余弦乘积的差,除以邻边正弦的乘积,即

$$\left. \begin{array}{l}
 \cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c} \\
 \cos B = \frac{\cos b - \cos a \cdot \cos c}{\sin a \cdot \sin c} \\
 \cos C = \frac{\cos c - \cos a \cdot \cos b}{\sin a \cdot \sin b}
 \end{array} \right\} \quad (3a)$$

公式(3)适用于已知球面三角形的二边及其所夾的角求第三边的值, 而公式(3a)则是用于已知球面三角形的三边求角的值。

今以極綫三角形的关系代入式(3)及(3a), 又可得到另外兩組球面余弦公式, 即

$$\left. \begin{aligned} \cos A &= -\cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \sin C \cdot \cos a \\ \cos B &= -\cos A \cdot \cos C + \sin A \cdot \sin C \cdot \cos b \\ \cos C &= -\cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B \cdot \cos c \end{aligned} \right\} \quad (3b)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos a &= \frac{\cos A + \cos B \cdot \cos C}{\sin B \cdot \sin C} \\ \cos b &= \frac{\cos B + \cos A \cdot \cos C}{\sin A \cdot \sin C} \\ \cos c &= \frac{\cos C + \cos A \cdot \cos B}{\sin A \cdot \sin B} \end{aligned} \right\} \quad (3c)$$

公式(3b)适用于已知球面三角形的二角及其所夾的边求第三角的值, 公式(3c)适用于已知球面三角形的三角求边的值。

应用球面余弦公式进行計算时, 可采用輔助角方法以簡化演算的手續 (亦可用和差对数計算表)。

例題 8. 設球面三角形 ABC , $b=100^{\circ}51'.7$, $c=53^{\circ}28'.0$, $A=14^{\circ}24'.2$, 求 a 边的值。

解

由球面余弦公式(3) $\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$

以 M_a 为輔助角, 并命

$$\operatorname{tg} M_a = \cos A \cdot \operatorname{tg} b$$

于是 $\cos a = \cos b \cdot \sec M_a \cdot \cos(M_a - c)$

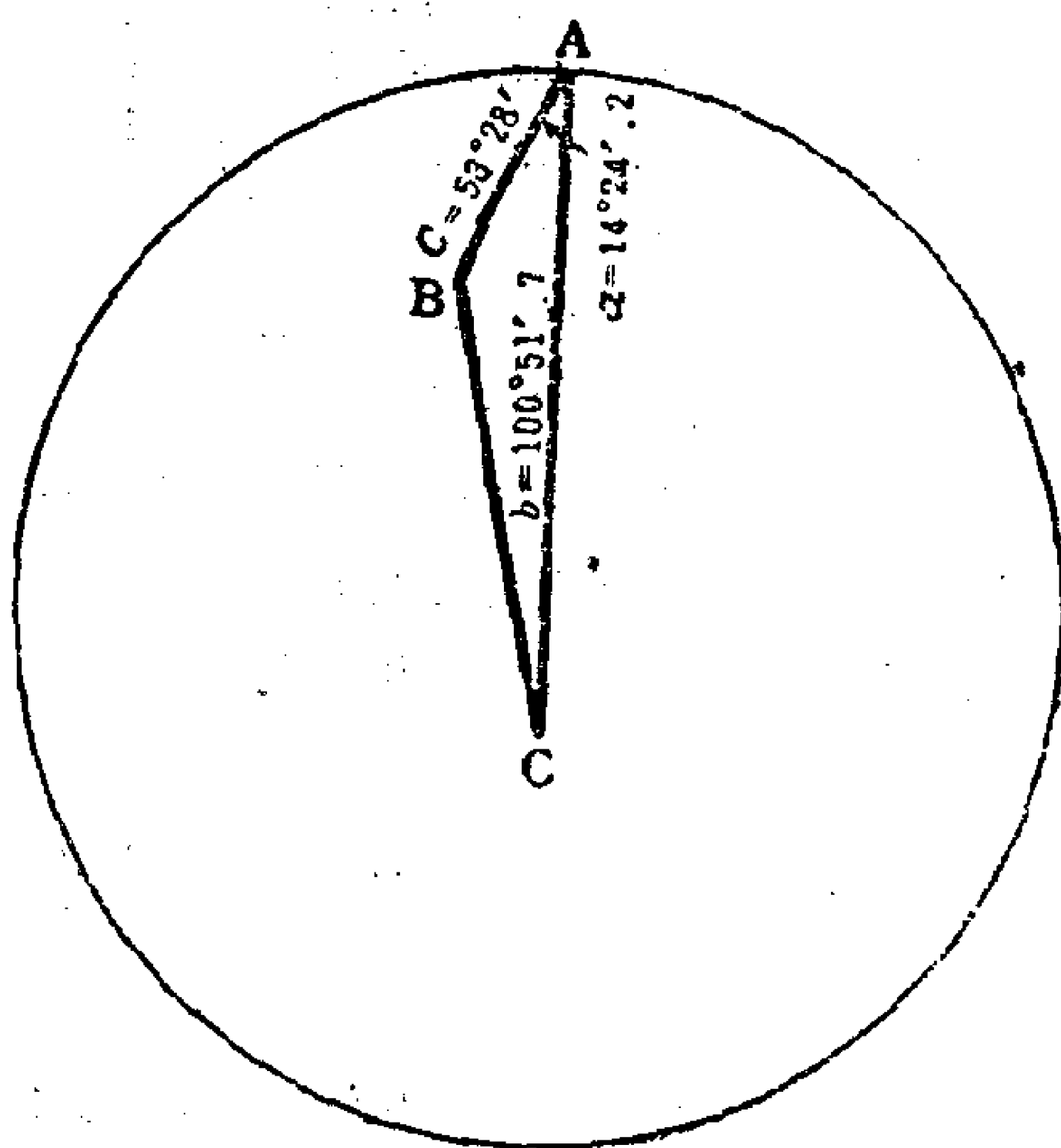
$A=14^{\circ}24'.2$	$L \cos$	9.98613	
$b=100^{\circ}51'.7$	$L \operatorname{tg}$	0.71698 n	$L \cos$ 9.27517 n
$M_a=101^{\circ}12'.3$	$L \operatorname{tg}$	0.70311 n	$L \sec$ 0.71148 n
$c=53^{\circ}28'.0$			
$M_a - c = 47^{\circ}44'.3$			$L \cos$ 9.82771
$a=49^{\circ}17'.7$			$L \cos$ 9.81436

本例題用“和差对数計算表”的計算如下:

由球面余弦公式(3)

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A = -I + II$$

$A = 14^\circ 24'.2$		$L \cos$	9.98613
$b = 100^\circ 51'.7$	$L \cos$	9.27517	$L \sin$ 9.99215
$c = 53^\circ 28'.0$	$L \cos$	9.77473	$L \sin$ 9.90499
		9.04990	9.88327
	$-I + II$	0.83337	β 9.93107
$a = 49^\circ 17'.8$		$L \cos$	9.81434



(例題 8 附圖)

例題 9. 設球面三角形 AEC , $a = 70^\circ 20'.8$, $b = 38^\circ 28'.0$, $c = 51^\circ 41'.2$, 求 A 角的值。

解

由球面余弦公式(3a) $\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$

命

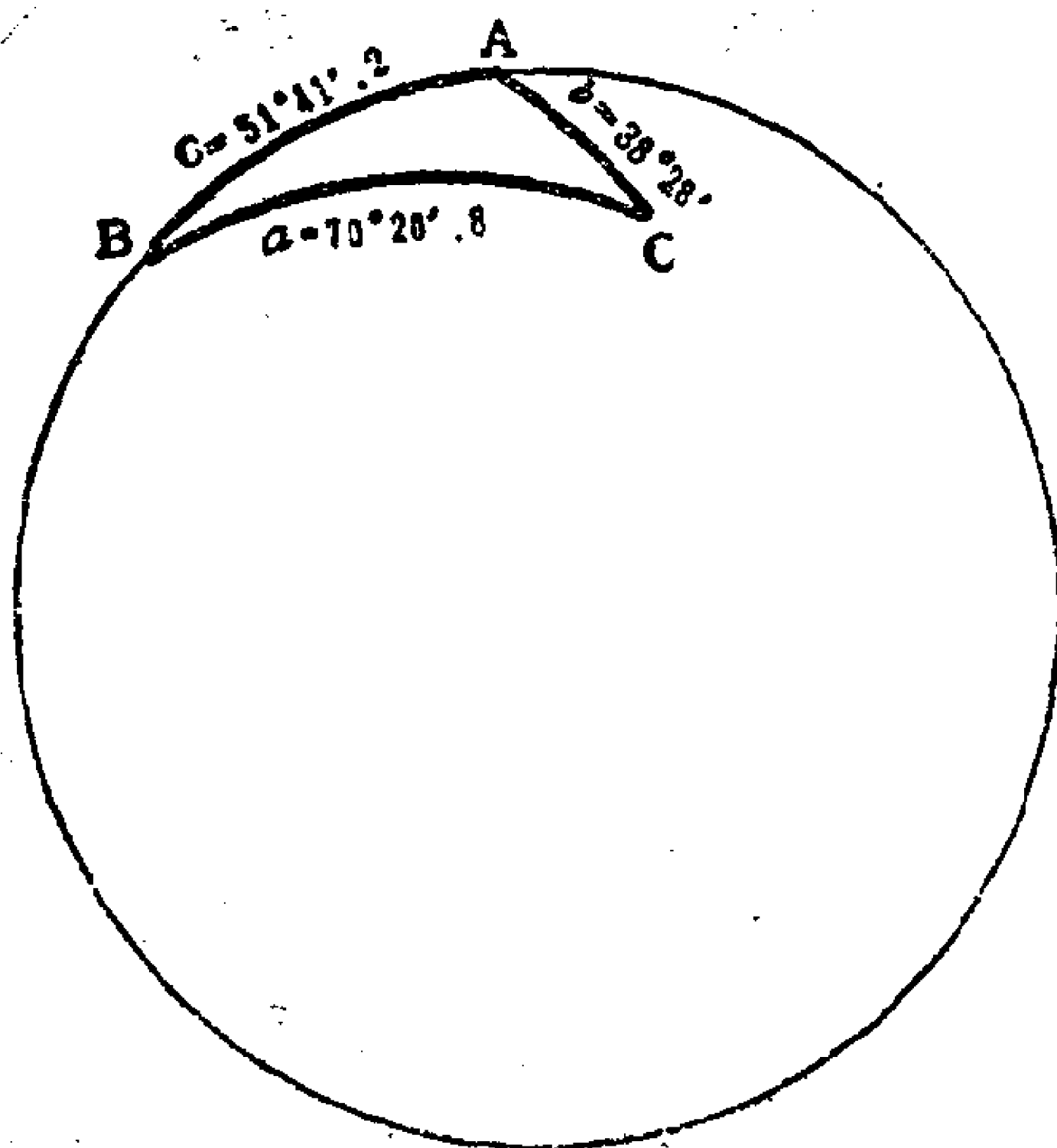
$$\operatorname{tg} M_A = \sec a \cdot \cos c \cdot \sin b$$

于是

$$\cos A = \operatorname{ctg} c \cdot \csc b \cdot \csc M_A \cdot \sin(b - M_A)$$

$a = 70^\circ 20'.8$		$L \sec$	0.47324
$c = 51^\circ 41'.2$	$L \cos$	9.79237	$L \operatorname{ctg}$ 9.89770
$b = 38^\circ 28'.0$	$L \sin$	9.79383	$L \csc$ 0.20617

$$\begin{array}{lll}
 M_A = 48^\circ 54'.5 & L \operatorname{tg} & 0.05944 & L \operatorname{csc} & 0.12282 \\
 b - M_A = -10^\circ 26'.5 & & & L \sin & 9.25824 \text{ n} \\
 A = 107^\circ 47'.1 & & & L \cos & 9.48493 \text{ n}
 \end{array}$$



(例題 9 附圖)

本例題用“和差對數計算表”的計算如下：

由球面余弦公式(3a)

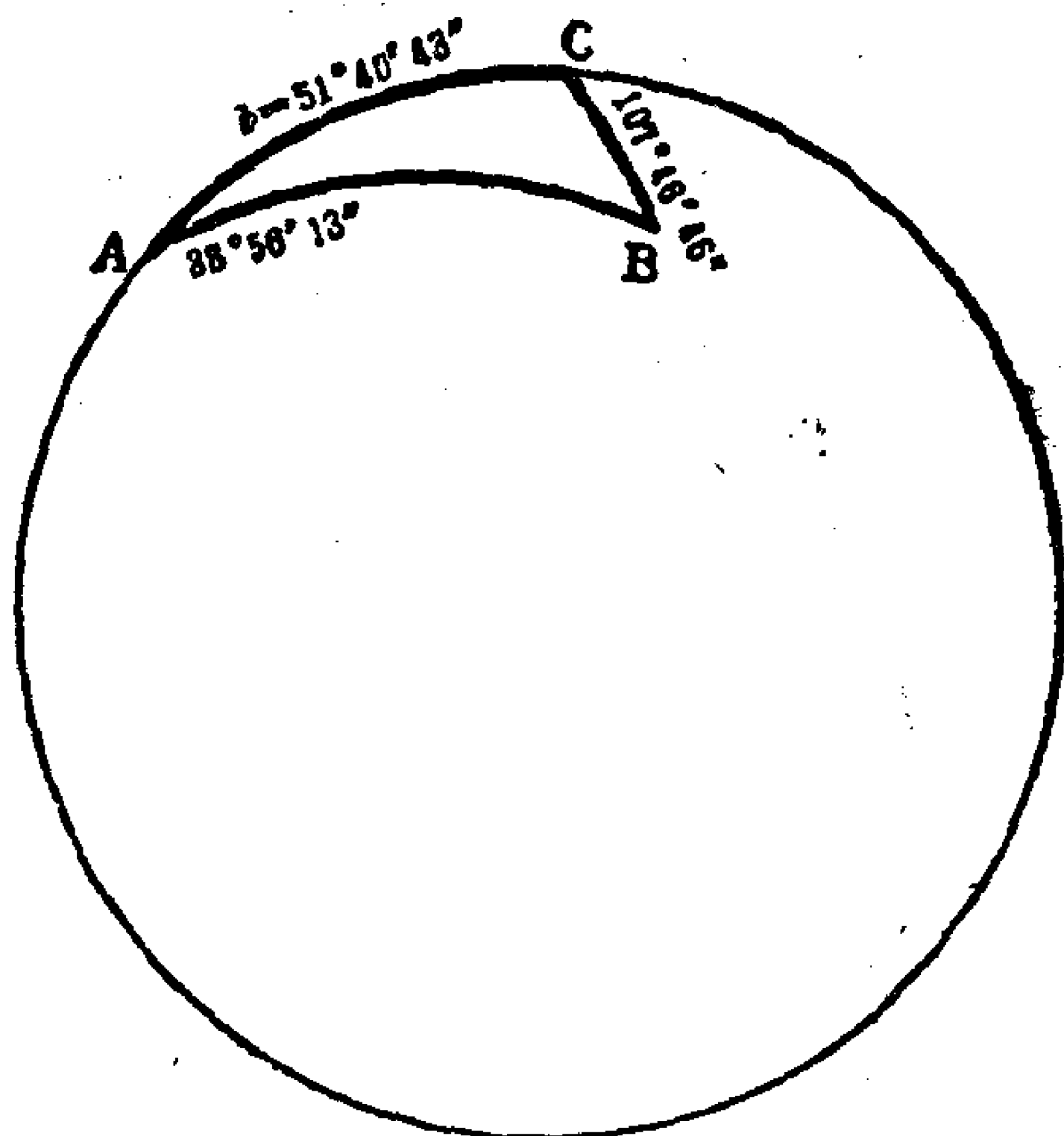
$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$$

即 $\cos A = \overset{+}{\cos a} \cdot \overset{+}{\operatorname{csc} b} \cdot \overset{+}{\operatorname{csc} c} - \overset{+}{\operatorname{ctg} b} \cdot \overset{+}{\operatorname{ctg} c} = +\text{I} - \text{II}$

$a = 70^\circ 20'.8$	$L \cos$	9.52676	
$b = 38^\circ 28'.0$	$L \operatorname{csc}$	0.20617	$L \operatorname{ctg}$ 0.09991
$c = 51^\circ 41'.2$	$L \operatorname{csc}$	0.10533	$L \operatorname{ctg}$ 9.89770
		9.83826	9.99761
	I - II	0.15935	β 9.48733 n
$A = 107^\circ 47'.1$			$L \cos$ 9.48494 n

例題 10. 設球面三角形 ABC, $A = 38^\circ 56' 13''$, $C = 107^\circ 46' 46''$, $b = 51^\circ 40' 43''$, 求 B 角的值。

解



(例題 10 附圖)

由球面余弦公式(3b) $\cos B = -\cos A \cdot \cos C + \sin A \cdot \sin C \cdot \cos b$

命 $\text{tg } M_B = \sec b \cdot \text{ctg } A$

于是 $\cos B = \cos A \cos M_B \cdot \sin(C - M_B)$

$b=51^\circ 40' 53''$	$L \sec$	0.20758	
$A=38^\circ 58' 13''$	$L \text{ctg}$	0.09210	$L \cos$ 9.89069
$M_B=63^\circ 21' 50''$	$L \text{tg}$	0.29968	$L \csc$ 0.04872
$C=107^\circ 46' 46''$			
$C - M_B = 44^\circ 24' 56''$			$L \sin$ 9.84501
$B=52^\circ 30' 10''$			$L \cos$ 9.78442

本例題用“和差对数計算表”的計算如下:

由球面余弦公式(3b)

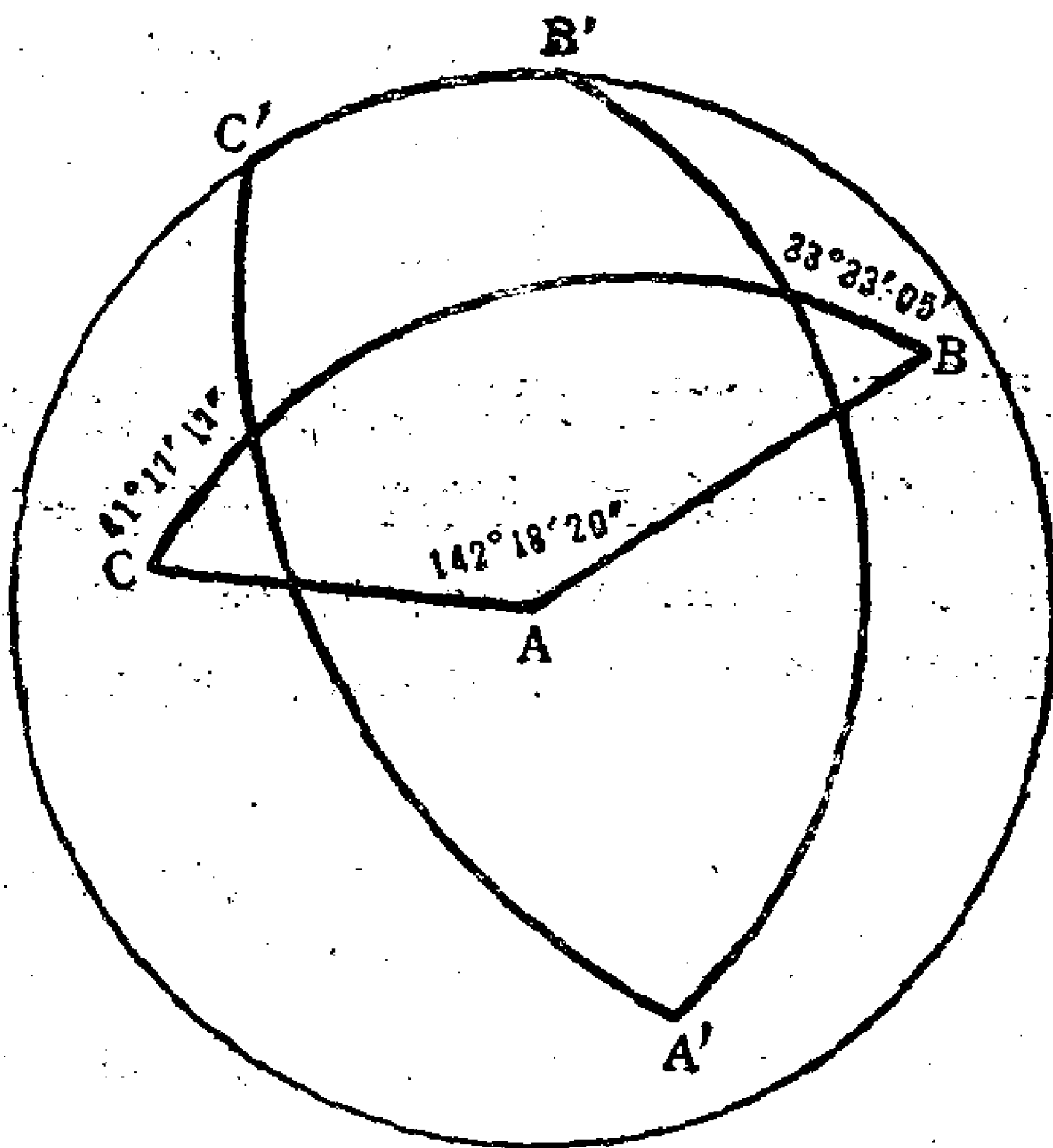
$\cos B = -\overset{+}{\cos} A \cdot \overset{-}{\cos} C + \overset{+}{\sin} A \cdot \overset{+}{\sin} C \cdot \overset{+}{\cos} b = +I + II$			
$b=51^\circ 40' 53''$	$L \cos$	9.79242	
$A=38^\circ 58' 13''$	$L \sin$	9.79859	$L \cos$ 9.89069
$C=107^\circ 46' 46''$	$L \sin$	9.97875	$L \cos$ 9.48480 "
		9.56976	9.37549 "

$$\alpha \quad 0.21466 \quad +I+II \quad 0.19427$$

$$B=52^{\circ}30'10'' \quad , \quad L \cos \quad 9.78442$$

例題 11. 設球面三角形 ABC , $A=142^{\circ}18'20''$, $B=33^{\circ}33'05''$, $C=41^{\circ}17'17''$, 求 c 边的值。

解



(例題 11 附圖)

由球面余弦公式(3c) $\cos c = \frac{\cos C + \cos A \cdot \cos B}{\sin A \cdot \sin B}$

命

$$\operatorname{tg} M_c = \sec C \cdot \cos A \cdot \sin B$$

于是

$$\cos c = \operatorname{ctg} A \cdot \csc B \cdot \csc M_c \cdot \sin(B + M_c)$$

$$C=41^{\circ}17'17'' \quad L \sec \quad 0.12413$$

$$A=142^{\circ}18'20'' \quad L \cos \quad 9.89833 \quad n \quad L \operatorname{ctg} \quad 0.11197 \quad n$$

$$B=33^{\circ}33'05'' \quad L \sin \quad 9.74248 \quad L \csc \quad 0.25752$$

$$M_c=149^{\circ}47'58'' \quad L \operatorname{tg} \quad 9.76494 \quad n \quad L \csc \quad 0.29841$$

$$B + M_c = 183^{\circ}21'03'' \quad L \sin \quad 8.76678 \quad n$$

$$c=74^{\circ}12'45'' \quad L \cos \quad 9.43468$$

本例題用“和差对数計算表”的計算如下：

由球面余弦公式(3c)

$$\cos c = \frac{\cos C + \cos A \cdot \cos B}{\sin A \cdot \sin B}$$

即 $\cos c = \overset{+}{\cos} C \cdot \overset{+}{\csc} A \cdot \overset{+}{\csc} B + \overset{-}{\text{ctg}} A \cdot \overset{+}{\text{ctg}} B = +\text{I} - \text{II}$

C=41°17'17"	L cos	9.87587	
A=142°18'20"	L csc	0.21364	L ctg 0.11197 n
B=33°33'05"	L csc	0.25752	L ctg 0.17837
		0.34703	0.29034 n
	β	9.08769	+I-II 0.05669
c=74°12'40"	L cos	9.43472	

4.5 球面半正矢公式、球面半正矢补角公式

正矢函数的定义是一与余弦函数的差，而正矢补角函数是一与余弦函数的和。故半正矢函数 (Half-versine, 简写 Hav.) 为一与余弦函数的差的一半，而半正矢补角函数 (Sub. half-versine, 简写 Shav.) 为一与余弦函数的和的一半，即

$$\text{Hav} a = \frac{1}{2}(1 - \cos a) \quad \text{Shav} a = \frac{1}{2}(1 + \cos a)$$

$$\text{Hav} A = \frac{1}{2}(1 - \cos A) \quad \text{Shav} A = \frac{1}{2}(1 + \cos A)$$

而 $\text{Hav} a = \frac{1}{2}(1 - \cos a) = \frac{1}{2}[1 + \cos(180^\circ - a)] = \text{Shav}(180^\circ - a)$

$$\text{Hav} A = \frac{1}{2}(1 - \cos A) = \frac{1}{2}[1 + \cos(180^\circ - A)] = \text{Shav}(180^\circ - A)$$

或 $\text{Shav} a = \frac{1}{2}(1 + \cos a) = \frac{1}{2}[1 - \cos(180^\circ - a)] = \text{Hav}(180^\circ - a)$

$$\text{Shav} A = \frac{1}{2}(1 + \cos A) = \frac{1}{2}[1 - \cos(180^\circ - A)] = \text{Hav}(180^\circ - A)$$

今由球面余弦公式(3)已知

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$$

故
$$\begin{aligned} \text{Hav} a &= \frac{1}{2}[1 - (\cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A)] \\ &= \frac{1}{2}[1 - \cos b \cdot \cos c - \sin b \cdot \sin c (1 - 2\text{Hav} A)] \\ &= \frac{1}{2}[1 - \cos(b-c) + 2\sin b \cdot \sin c \cdot \text{Hav} A] \\ &= \text{Hav}(b-c) + \sin b \cdot \sin c \cdot \text{Hav} A \end{aligned}$$

故球面三角形边的半正矢公式为

$$\left. \begin{aligned} \text{Hav} a &= \text{Hav}(b-c) + \sin b \cdot \sin c \cdot \text{Hav} A \\ \text{Hav} b &= \text{Hav}(a-c) + \sin a \cdot \sin c \cdot \text{Hav} B \\ \text{Hav} c &= \text{Hav}(a-b) + \sin a \cdot \sin b \cdot \text{Hav} C \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
\text{又} \quad \text{Shav } a &= \frac{1}{2}(1 + \cos a) \\
&= \frac{1}{2}(1 + \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A) \\
&= \frac{1}{2} \left[\cos^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{A}{2} + \cos b \cdot \cos c \cdot \left(\cos^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{A}{2} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \sin b \cdot \sin c \left(\cos^2 \frac{A}{2} - \sin^2 \frac{A}{2} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \cos^2 \frac{A}{2} [1 + \cos(b-c)] + \sin^2 \frac{A}{2} [1 + \cos(b+c)] \right\} \\
&= \frac{1}{2} (1 + \cos A) \cdot \frac{1}{2} [1 + \cos(b-c)] + \frac{1}{2} [1 + \cos(180^\circ - A)] \cdot \\
&\quad \cdot \frac{1}{2} [1 + \cos(b+c)] \\
&= \text{Shav } A \cdot \text{Shav}(b-c) + \text{Shav}(180^\circ - A) \cdot \text{Shav}(b+c)
\end{aligned}$$

故球面三角形边的半正矢补角公式

$$\left. \begin{aligned}
\text{Shav } a &= \text{Shav } A \cdot \text{Shav}(b-c) + \text{Shav}(180^\circ - A) \cdot \text{Shav}(b+c) \\
\text{Shav } b &= \text{Shav } B \cdot \text{Shav}(a-c) + \text{Shav}(180^\circ - B) \cdot \text{Shav}(a+c) \\
\text{Shav } c &= \text{Shav } C \cdot \text{Shav}(a-b) + \text{Shav}(180^\circ - C) \cdot \text{Shav}(a+b)
\end{aligned} \right\} (6)$$

今將球面三角形边的半正矢公式(5)移項之后, 得

$$\begin{aligned}
\text{Hav } A &= \frac{\text{Hav } a - \text{Hav}(b-c)}{\sin b \cdot \sin c} \\
\text{Hav } B &= \frac{\text{Hav } b - \text{Hav}(a-c)}{\sin a \cdot \sin c} \\
\text{Hav } C &= \frac{\text{Hav } c - \text{Hav}(a-b)}{\sin a \cdot \sin b}
\end{aligned}$$

$$\text{但 } \text{Hav } a - \text{Hav}(b-c) = \sqrt{\text{Hav}(a+b-c) \cdot \text{Hav}(a-b-c)}$$

$$\text{Hav } b - \text{Hav}(a-c) = \sqrt{\text{Hav}(b+a-c) \cdot \text{Hav}(b-a-c)}$$

$$\text{Hav } c - \text{Hav}(a-b) = \sqrt{\text{Hav}(c+a-b) \cdot \text{Hav}(c-a-b)}$$

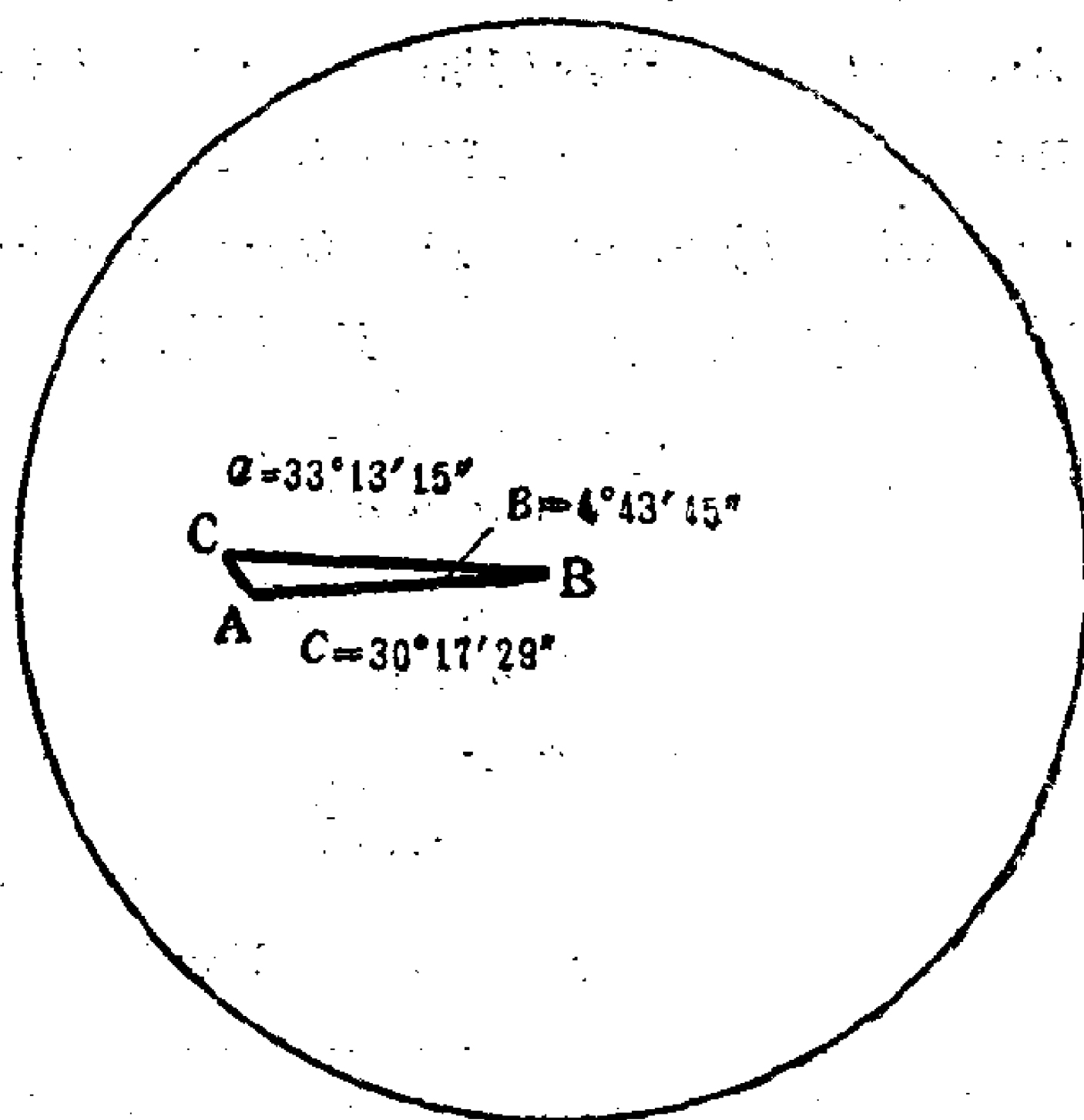
代入上式則得球面三角形角的半正矢公式

$$\left. \begin{aligned}
\text{Hav } A &= \csc b \cdot \csc c \cdot \sqrt{\text{Hav}(a+b-c) \cdot \text{Hav}(a-b-c)} \\
\text{Hav } B &= \csc a \cdot \csc c \cdot \sqrt{\text{Hav}(b+a-c) \cdot \text{Hav}(b-a-c)} \\
\text{Hav } C &= \csc a \cdot \csc b \cdot \sqrt{\text{Hav}(c+a-b) \cdot \text{Hav}(c-a-b)}
\end{aligned} \right\} (7)$$

球面半正矢公式在航海的演算中是比較常見的，而球面半正矢補角公式則僅見于英國的航海教科書(Admiralty Navigation Manual)中。航海常用的對數表，如 **Jnmau's** 對數表，**Norie's** 對數表等，均附印有半正矢函數表。表中列有半正矢函數 $0^\circ-180^\circ$ 的對數值及其函數值，而 **Jnmau's** 對數表更附有半正矢函數方根對數表。但半正矢函數值在 $0^\circ-8^\circ$ 範圍之內，對數值在 $172^\circ-180^\circ$ 範圍之內，數值變化緩慢，在此範圍之內，以半正矢函數定值，其結果並不精確。下面的例題將証實這樣的結論。

例題 12. 設球面三角形 ABC , $a=33^\circ 13' 15''$, $c=30^\circ 17' 29''$, $B=4^\circ 43' 45''$, 求 b 邊的值。

解



(例題 12 附圖)

由球面半正矢公式(5) $\text{Hav } b = \text{Hav}(a-c) + \sin a \cdot \sin c \cdot \text{Hav } B$

$$B=4^\circ 43' 45'' \quad L \text{Hav } 7.23102$$

$$a=33^\circ 13' 15'' \quad L \sin 9.73868$$

$$c=30^\circ 17' 29'' \quad L \sin 9.70278$$

$$L \text{Hav } 6.67248$$

$$N \text{Hav } 0.00047$$

$$a-c=2^{\circ}55'46''$$

$$N \text{ Hav } 0.00066$$

$$3^{\circ}51'00'' < b < 3^{\circ}51'30''$$

$$N \text{ Hav } 0.00113$$

本題亦可用球面半正矢補角公式求解。由公式(6)得

$$\text{Shav } b = \text{Shav } B \cdot \text{Shav}(a-c) + \text{Shav}(180^{\circ} - B) \cdot \text{Shav}(a+c)$$

$$a=33^{\circ}13'15''$$

$$c=30^{\circ}17'29''$$

$$a-c=2^{\circ}55'46''$$

$$L \text{ Shav } 9.99972$$

$$a+c=63^{\circ}30'44''$$

$$L \text{ Shav } 9.85914$$

$$B=4^{\circ}43'45''$$

$$L \text{ Shav } 9.99925$$

$$180^{\circ} - B = 175^{\circ}16'15''$$

$$L \text{ Shav } 7.23102$$

$$L \text{ Shav } 9.99898$$

$$L \text{ Shav } 7.09016$$

$$N \text{ Shav } 0.99766$$

$$N \text{ Shav } 0.00123$$

$$N \text{ Shav } 0.00123$$

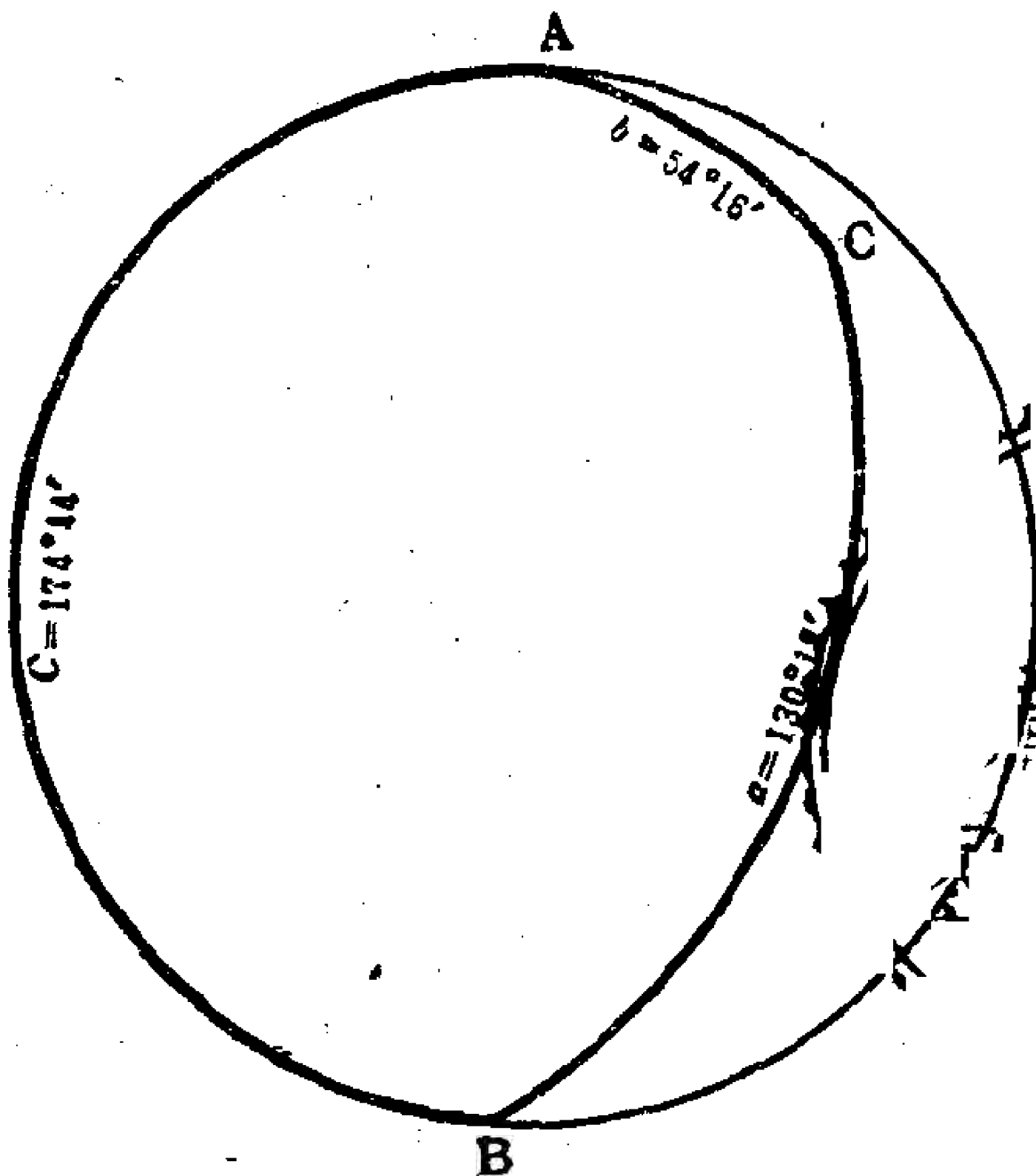
$$b=3^{\circ}49'00''$$

$$N \text{ Shav } 0.99889$$

註：由正切函數求得 b 的值應為 $3^{\circ}50'31.4''$

例題 13. 設球面三角形 ABC , $a=130^{\circ}12'$, $b=54^{\circ}16'$, $c=174^{\circ}44'$, 求 C 角的值。

解



(例題 13 附圖)

由球面半正矢公式(7)

$$\text{Hav } c = \csc a \cdot \csc b \cdot \sqrt{\text{Hav } (c+a-b) \cdot \text{Hav } (c-a-b)}$$

$$a=130^{\circ}12' \quad L \csc 0.11702$$

$$b=54^{\circ}16' \quad L \csc 0.09058$$

$$a-b=75^{\circ}56'$$

$$c=174^{\circ}44'$$

$$c+a-b=250^{\circ}40' \quad \frac{1}{2}L \text{Hav } 4.91158$$

$$c-a-b=98^{\circ}48' \quad \frac{1}{2}L \text{Hav } 4.88040$$

$$176^{\circ}25' < C < 176^{\circ}27' \quad L \text{Hav } 9.99958$$

註：由正切函数求得 C 的值应为 $176^{\circ}27'27.8''$ 。

4.6 球面半角公式、球面半边公式

由球面余弦公式(3a)有

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$$

但

$$\cos A = 1 - 2\sin^2 \frac{A}{2}$$

故

$$\sin^2 \frac{A}{2} = 1 - \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$= \frac{\cos(b-c) - \cos a}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$= \frac{2\sin \frac{1}{2}(a+b-c) \cdot \sin \frac{1}{2}(a-b+c)}{\sin b \cdot \sin c}$$

即

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(a+b-c) \cdot \sin \frac{1}{2}(a-b+c)}{\sin b \cdot \sin c}}$$

命

$$\frac{1}{2}(a+b+c) = p$$

于是 $\frac{1}{2}(b+c-a) = (p-a) = p_a$, $\frac{1}{2}(a-b+c) = (p-b) = p_b$,

$$\frac{1}{2}(a+b-c) = (p-c) = p_c$$

代入上式則得球面半角正弦公式

同理

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{\sin p_b \cdot \sin p_c}{\sin b \cdot \sin c}} \\ \sin \frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{\sin p_a \cdot \sin p_c}{\sin a \cdot \sin c}} \\ \sin \frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{\sin p_a \cdot \sin p_b}{\sin a \cdot \sin b}} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

由于球面三角形的每一个角皆小于 180° 而大于 0° ，故半角的正弦函数恒为正值，公式的根号前为正号。

又
$$\cos A = 2\cos^2 \frac{A}{2} - 1$$

故
$$\begin{aligned} 2\cos^2 \frac{A}{2} &= 1 + \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c} \\ &= \frac{\cos a - \cos(b+c)}{\sin b \cdot \sin c} \\ &= \frac{2\sin \frac{1}{2}(a+b+c) \cdot \sin \frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b \cdot \sin c} \end{aligned}$$

即
$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(a+b+c) \cdot \sin \frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b \cdot \sin c}}$$

今

$$\frac{1}{2}(a+b+c) = p, \quad \frac{1}{2}(b+c-a) = p_a, \quad \frac{1}{2}(a-b+c) = p_b, \quad \frac{1}{2}(a+b-c) = p_c$$

代入上式则得球面半角余弦公式

同理

$$\left. \begin{aligned} \cos \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{\sin p \cdot \sin p_a}{\sin b \cdot \sin c}} \\ \cos \frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{\sin p \cdot \sin p_b}{\sin a \cdot \sin c}} \\ \cos \frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{\sin p \cdot \sin p_c}{\sin a \cdot \sin b}} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

由于半角的余弦函数为正值，故公式的根号前为正号。

又
$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}}$$

而

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$$

故
$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin b \cdot \sin c - \cos a + \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c + \cos a - \cos b \cdot \cos c}}$$

$$= \sqrt{\frac{\cos(b-c) + \cos a}{\cos a - \cos(b+c)}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(a-b+c) \cdot \sin \frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin \frac{1}{2}(a+b+c) \cdot \sin \frac{1}{2}(b+c-a)}}$$

今

$$\frac{1}{2}(a+b+c) = p, \frac{1}{2}(b+c-a) = p_a, \frac{1}{2}(a-b+c) = p_b, \frac{1}{2}(a+b-c) = p_c$$

代入上式則得球面半角正切公式

同理
$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{\sin p_b \cdot \sin p_c}{\sin p \cdot \sin p_a}} \\ \operatorname{tg} \frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{\sin p_a \cdot \sin p_c}{\sin p \cdot \sin p_b}} \\ \operatorname{tg} \frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{\sin p_a \cdot \sin p_b}{\sin p \cdot \sin p_c}} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

由于半角的正切函数为正值，故公式的根号前为正号。

今以極綫三角形的关系代入公式(8)–(10)，并命 $P = \frac{1}{2}(A+B+C)$ ， $P_A = \frac{1}{2}(B+C-A)$ ， $P_B = \frac{1}{2}(A-B+C)$ ， $P_C = \frac{1}{2}(A+B-C)$ ，于是得

球面半边正弦公式

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{-\cos P \cdot \cos P_A}{\sin B \cdot \sin C}} \\ \sin \frac{b}{2} &= \sqrt{\frac{-\cos P \cdot \cos P_B}{\sin A \cdot \sin C}} \\ \sin \frac{c}{2} &= \sqrt{\frac{-\cos P \cdot \cos P_C}{\sin A \cdot \sin B}} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

球面半边余弦公式

$$\left. \begin{aligned} \cos \frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{\cos P_B \cdot \cos P_C}{\sin B \cdot \sin C}} \\ \cos \frac{b}{2} &= \sqrt{\frac{\cos P_A \cdot \cos P_C}{\sin A \cdot \sin C}} \\ \cos \frac{c}{2} &= \sqrt{\frac{\cos P_A \cdot \cos P_B}{\sin A \cdot \sin B}} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

球面半边正切公式

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{-\cos P \cdot \cos P_A}{\cos P_B \cdot \cos P_C}} \\ \operatorname{tg} \frac{b}{2} &= \sqrt{\frac{-\cos P \cdot \cos P_B}{\cos P_A \cdot \cos P_C}} \\ \operatorname{tg} \frac{c}{2} &= \sqrt{\frac{-\cos P \cdot \cos P_C}{\cos P_A \cdot \cos P_B}} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

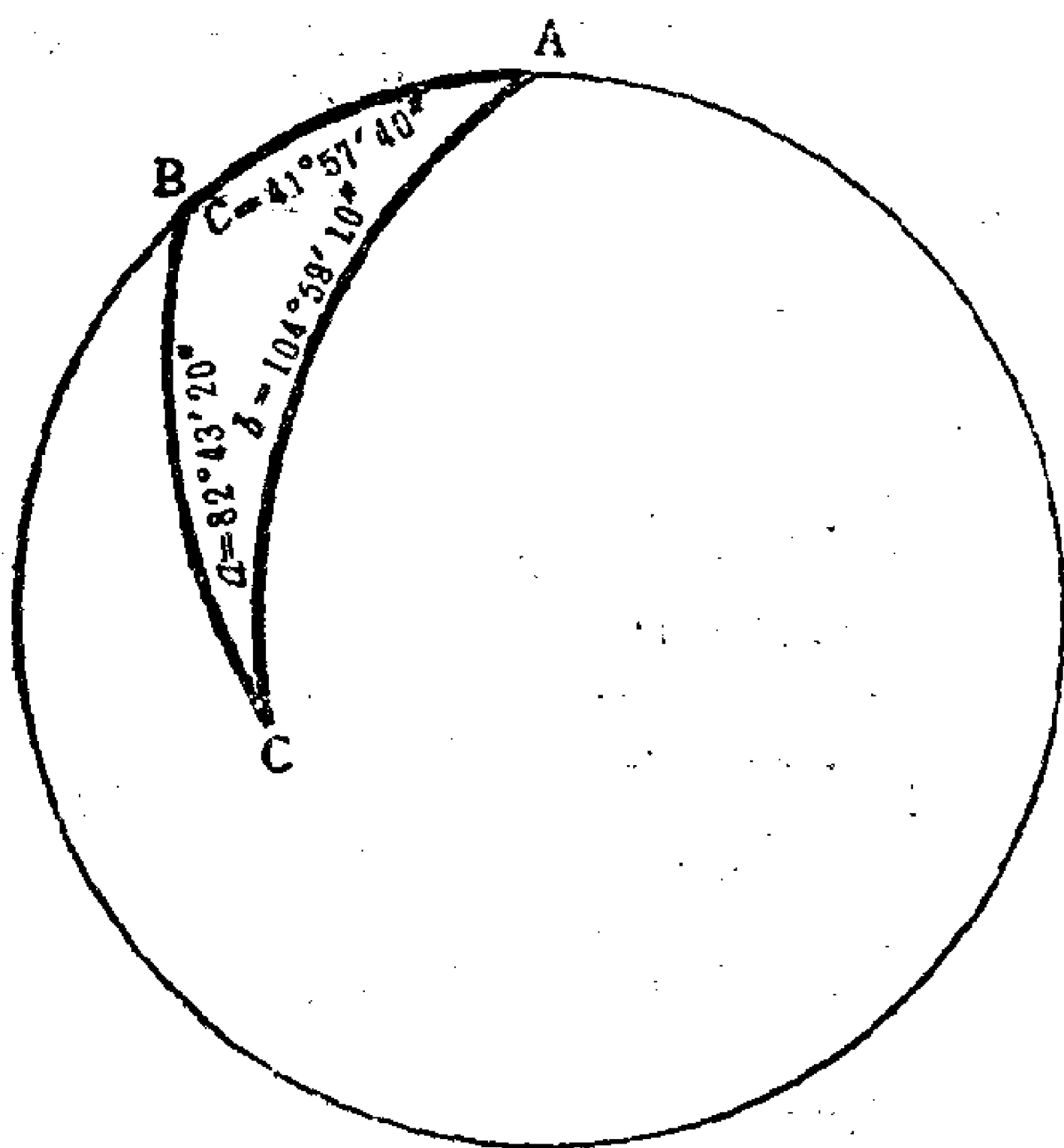
由于球面三角形的每一个边皆小于 180° 而大于 0° ，故半边的正弦，余弦及正切等函数皆为正值，公式的根号前为正号。

球面半边公式可以用球面角盈 E 表示。球面角盈 $E = A + B + C - 180^\circ$ (2.4d)，故 $P = 90^\circ + \frac{E}{2}$ ， $P_A = 90^\circ - \left(A - \frac{E}{2}\right)$ ， $P_B = 90^\circ - \left(B - \frac{E}{2}\right)$ ， $P_C = 90^\circ - \left(C - \frac{E}{2}\right)$ 。将这些关系代入球面半边公式 (11) — (13) 则得

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{\sin \frac{E}{2} \cdot \sin \left(A - \frac{E}{2}\right)}{\sin B \cdot \sin C}} \\ \sin \frac{b}{2} &= \sqrt{\frac{\sin \frac{E}{2} \cdot \sin \left(B - \frac{E}{2}\right)}{\sin A \cdot \sin C}} \\ \sin \frac{c}{2} &= \sqrt{\frac{\sin \frac{E}{2} \cdot \sin \left(C - \frac{E}{2}\right)}{\sin A \cdot \sin B}} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{\sin\left(B - \frac{E}{2}\right) \cdot \sin\left(C - \frac{E}{2}\right)}{\sin B \cdot \sin C}} \\ \cos \frac{b}{2} &= \sqrt{\frac{\sin\left(A - \frac{E}{2}\right) \cdot \sin\left(C - \frac{E}{2}\right)}{\sin A \cdot \sin C}} \\ \cos \frac{c}{2} &= \sqrt{\frac{\sin\left(A - \frac{E}{2}\right) \cdot \sin\left(B - \frac{E}{2}\right)}{\sin A \cdot \sin B}} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{\sin \frac{E}{2} \cdot \sin\left(A - \frac{E}{2}\right)}{\sin\left(B - \frac{E}{2}\right) \cdot \sin\left(C - \frac{E}{2}\right)}} \\ \operatorname{tg} \frac{b}{2} &= \sqrt{\frac{\sin \frac{E}{2} \cdot \sin\left(B - \frac{E}{2}\right)}{\sin\left(A - \frac{E}{2}\right) \cdot \sin\left(C - \frac{E}{2}\right)}} \\ \operatorname{tg} \frac{c}{2} &= \sqrt{\frac{\sin \frac{E}{2} \cdot \sin\left(C - \frac{E}{2}\right)}{\sin\left(A - \frac{E}{2}\right) \cdot \sin\left(B - \frac{E}{2}\right)}} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$



(例題 14 附圖)

例題 14. 設球面三角形 ABC , $a=82^{\circ}43'20''$, $b=104^{\circ}59'10''$, $c=41^{\circ}57'40''$, 求該球面三角形各角的值。

解 由于余弦函数所定的接近于 0° 的值及正弦函数所定的接近于 90° 的值不能精确, 因此, 以正切函数定值, 就整个情况而言, 是较为理想的。本题用球面半角正切公式 (10) 的解法如下:

$$a = 82^{\circ}43'20''$$

$$b = 104^{\circ}59'10''$$

$$c = 41^{\circ}57'40''$$

$$2P=229^{\circ}40'10''$$

$$P=114^{\circ}50'05'' \quad L \csc 0.04215 \quad L \csc 0.04215 \quad L \csc 0.04215$$

$$P_a=32^{\circ}06'45'' \quad L \csc 0.27443 \quad L \sin 9.72557 \quad L \sin 9.72557$$

$$P_b=9^{\circ}50'55'' \quad L \sin 9.23311 \quad L \csc 0.76689 \quad L \sin 9.23311$$

$$P_c=72^{\circ}52'25'' \quad L \sin 9.98031 \quad L \sin 9.98031 \quad L \csc 0.01969$$

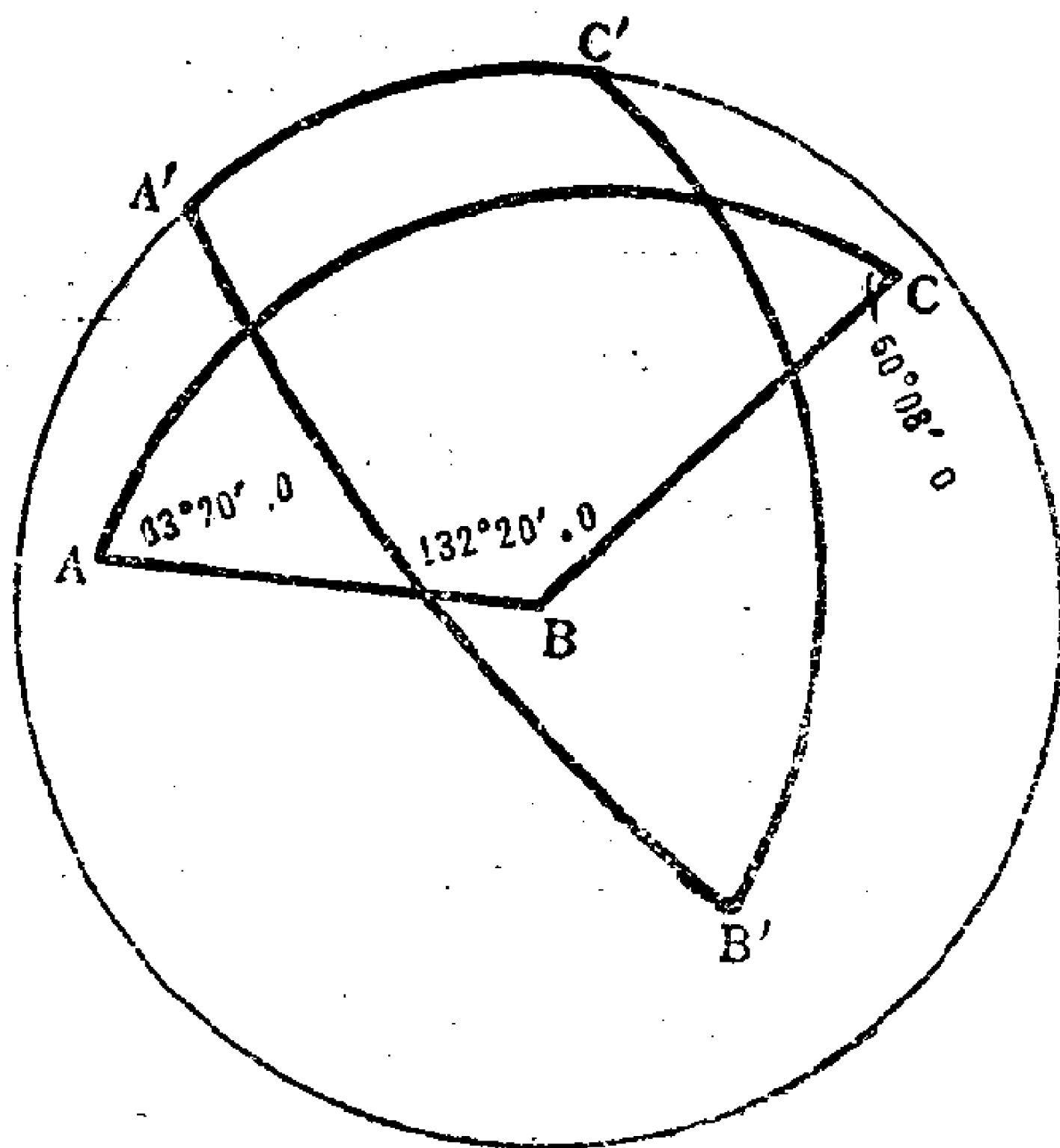
$$2L \operatorname{tg} 19.53000 \quad 2L \operatorname{tg} 20.51492 \quad 2L \operatorname{tg} 19.02052$$

$$L \operatorname{tg} 9.76500 \quad L \operatorname{tg} 10.25746 \quad L \operatorname{tg} 9.51026$$

$$\frac{A}{2}=30^{\circ}12'15'' \quad \frac{B}{2}=61^{\circ}04'04'' \quad \frac{C}{2}=17^{\circ}56'30''$$

$$A=60^{\circ}24'30'' \quad B=122^{\circ}08'08'' \quad C=35^{\circ}53'00''$$

題例 15. 設球面三角形 AEC , $A=63^{\circ}20'.0$, $E=132^{\circ}20'.0$, $C=50^{\circ}08'.0$, 求該球面三角形各边的值。



(例題 15 附圖)

解 採用球面半邊正切公式(16)的解法如下:

$$A=63^{\circ}20'.0$$

$$E=132^{\circ}20'.0$$

$$C=50^{\circ}08'.0$$

$$2P=245^{\circ}48'.0$$

$$E = 65^{\circ}48.'0$$

$$\begin{aligned} \frac{E}{2} &= 32^{\circ}54.'0 & L \sin 9.73494 & L \sin 9.73494 & L \sin 9.73494 \\ A - \frac{E}{2} &= 30^{\circ}26.'0 & L \sin 9.70461 & L \csc 0.29539 & L \csc 0.29539 \\ B - \frac{E}{2} &= 99^{\circ}26.'0 & L \csc 0.00591 & L \sin 9.99409 & L \csc 0.00591 \\ C - \frac{E}{2} &= 17^{\circ}14.'0 & \underline{L \csc 0.52832} & \underline{L \csc 0.52832} & \underline{L \sin 9.47168} \\ & & 2L \operatorname{tg} 19.97378 & 2L \operatorname{tg} 20.55274 & 2L \operatorname{tg} 19.50792 \\ & & L \operatorname{tg} 9.98689 & L \operatorname{tg} 10.27637 & L \operatorname{tg} 9.75396 \\ & & \frac{a}{2} = 44^{\circ}08.'1 & \frac{b}{2} = 62^{\circ}06.'7 & \frac{c}{2} = 29^{\circ}34.'5 \\ & & a = 88^{\circ}16.'2 & b = 124^{\circ}13.'4 & c = 59^{\circ}09.'0 \end{aligned}$$

4.7 德朗布尔方程式、訥比尔相似方程式

由公式(8)得

$$\begin{aligned} \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{\sin p_b \cdot \sin p_c}{\sin b \cdot \sin c}} \cdot \sqrt{\frac{\sin p_a \cdot \sin p_c}{\sin a \cdot \sin c}} \\ &= \sin \frac{C}{2} \cdot \frac{\sin p_c}{\sin c} \end{aligned} \quad (\text{I})$$

由公式(9)得

$$\begin{aligned} \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{\sin p \cdot \sin p_a}{\sin b \cdot \sin c}} \cdot \sqrt{\frac{\sin p \cdot \sin p_b}{\sin a \cdot \sin c}} \\ &= \sin \frac{C}{2} \cdot \frac{\sin p}{\sin c} \end{aligned} \quad (\text{II})$$

由公式(8)及(9)得

$$\sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} = \cos \frac{C}{2} \cdot \frac{\sin p_c}{\sin c} \quad (\text{III})$$

$$\cos \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} = \cos \frac{C}{2} \cdot \frac{\sin p_a}{\sin c} \quad (\text{IV})$$

(I)+(II), 并化簡得

$$\cos \frac{A-B}{2} = \frac{\sin \frac{a+b}{2}}{\sin \frac{c}{2}} \cdot \sin \frac{C}{2}$$

(II)-(I), 并化簡得

$$\cos \frac{A+B}{2} = \frac{\cos \frac{a+b}{2}}{\cos \frac{c}{2}} \cdot \sin \frac{C}{2}$$

(III)-(IV), 并化簡得

$$\sin \frac{A-B}{2} = \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\sin \frac{c}{2}} \cdot \cos \frac{C}{2}$$

(III)+(IV), 并化簡得

$$\sin \frac{A+B}{2} = \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{c}{2}} \cdot \cos \frac{C}{2}$$

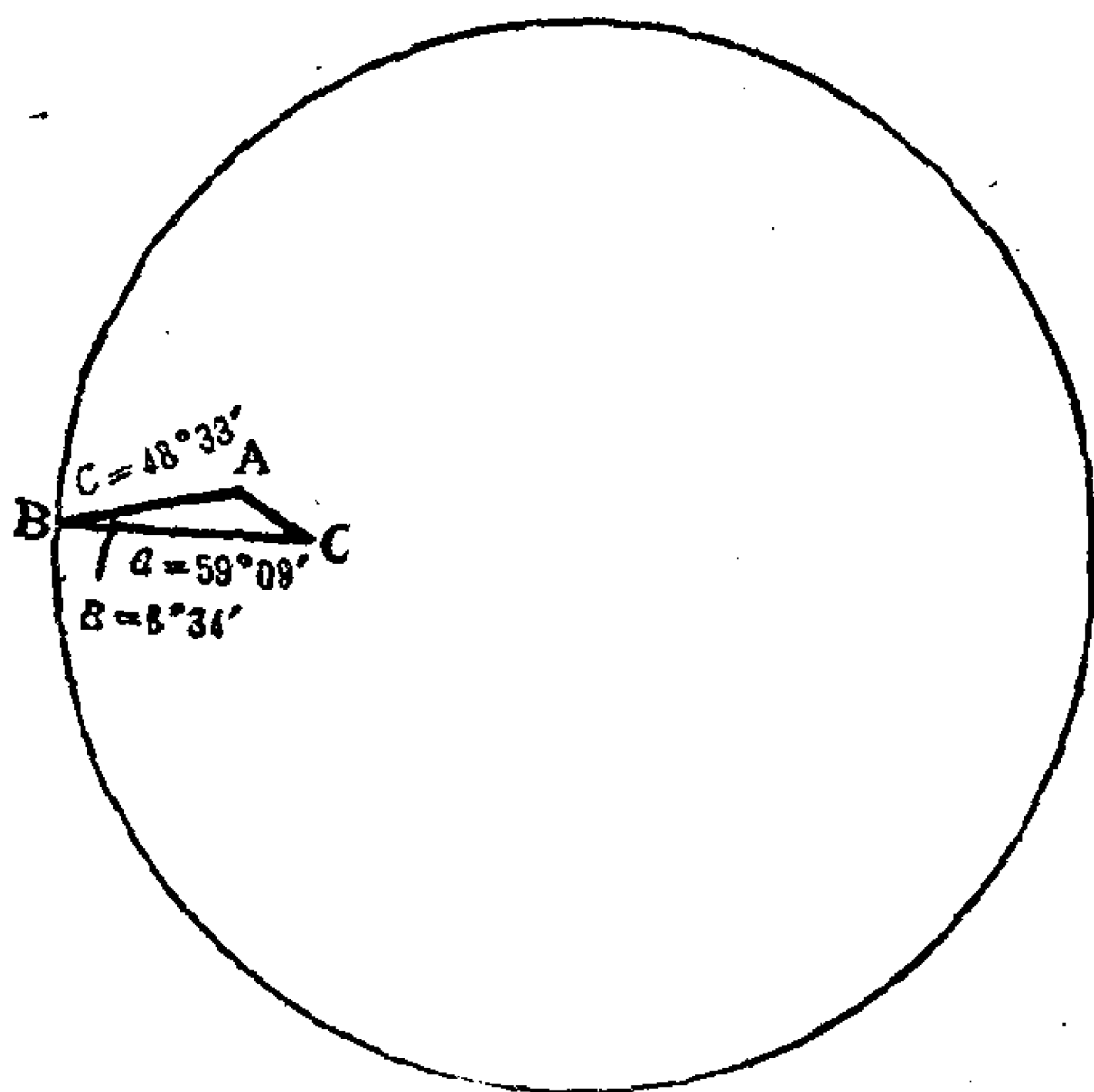
(17)

公式(17)叫作德朗布尔方程式 (Delambre's Analogies)。今以公式(17)中的任意一个方程式除另一方程式, 則得訥比尔相似方程式 (Napier's Analogies):

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B) &= \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)} \cdot \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B) &= \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)} \cdot \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2}(a-b) &= \frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}(A+B)} \cdot \operatorname{tg} \frac{c}{2} \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2}(a+b) &= \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}(A+B)} \cdot \operatorname{tg} \frac{c}{2} \\ \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B)} &= \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a+b)} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

显然, 用訥比尔相似方程式解已知二边及其夾角, 或二角及其夾边的球面三角形时, 因为是由正切函数定值, 所以結果是精确的。

例題 16. 設球面三角形 ABC , $a=59^{\circ}09'$, $c=48^{\circ}33'$, $B=8^{\circ}34'$, 解該球面三角形。



(例題 16 附圖)

解 由納比爾相似方程式(18)有

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+C) = \cos \frac{1}{2}(a-c) \cdot \sec \frac{1}{2}(a+c) \cdot \operatorname{ctg} \frac{B}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-C) = \sin \frac{1}{2}(a-c) \cdot \csc \frac{1}{2}(a+c) \cdot \operatorname{ctg} \frac{B}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-C) = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(a-c) \cdot \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(a+b) \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+C)$$

$$\operatorname{tg} \frac{b}{2} = \sin \frac{1}{2}(A+C) \cdot \csc \frac{1}{2}(A-C) \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}(a-c)$$

$$\operatorname{tg} \frac{b}{2} = \cos \frac{1}{2}(A+C) \sec \frac{1}{2}(A-C) \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}(a+c)$$

$$a=59^{\circ}09' \quad \frac{a}{2}=29^{\circ}34.5$$

$$c=48^{\circ}33' \quad \frac{c}{2}=24^{\circ}16.5$$

$$\frac{1}{2}(a-c)=5^{\circ}18.0 \quad L \cos 9.99814 \quad L \sin 8.96553 \quad L \operatorname{tg} 8.96739 \quad L \operatorname{tg} 8.96739$$

$$\frac{1}{2}(a+c)=53^{\circ}51.0 \quad L \sec 0.22922 \quad L \csc 0.09287 \quad L \operatorname{ctg} 9.86365 \quad L \operatorname{tg} 0.13635$$

$$B=8^{\circ}34' \quad \frac{B}{2}=4^{\circ}17.0 \quad \underline{L \operatorname{ctg} 1.12553} \quad \underline{L \operatorname{ctg} 1.12553}$$

$$A=144^{\circ}14.'7 \quad \frac{1}{2}(A+C)=87^{\circ}27.'6 \quad L \operatorname{tg} 1.35289 \quad L \operatorname{tg} 1.35289 \quad L \sin 9.99958$$

$$L \cos 8.64669$$

$$C=30^{\circ}40.'5 \quad \frac{1}{2}(A-C)=56^{\circ}47.'1 \quad L \operatorname{tg} 0.18393 \quad L \operatorname{tg} 0.18393 \quad L \csc 0.07747$$

$$L \sec 0.26139$$


$$\underline{b=12 \ 38.'6} \quad \frac{b}{2}=6^{\circ}19.'3 \quad L \operatorname{tg} 9.04444 \quad L \operatorname{tg} 9.04443$$

§5. 球面直角三角形、球面直边三角形

5.1 球面直角三角形公式

根据球面几何关于球面三角形的定义，凡有一个角为 90° 的球面三角形，就叫作球面直角三角形。设球面直角三角形 ABC ， $C=90^{\circ}$ ，于是 $\sin C=1$ ， $\cos C=0$ 。将这样的关系代入前节所证明的球面任意三角形各公式，则那些公式就成为适合于 C 角为 90° 的球面直角三角形的公式了。

球面任意三角形公式	球面直角三角形公式 $C=90^{\circ}$
$\sin a \cdot \sin B = \sin b \cdot \sin A$	$\sin a \cdot \sin B = \sin b \cdot \sin A$
$\sin a \cdot \sin C = \sin c \cdot \sin A$	$\sin a = \sin c \cdot \sin A$
$\sin b \cdot \sin C = \sin c \cdot \sin B$	$\sin b = \sin c \cdot \sin B$
$\sin a \cdot \cos C = \cos c \cdot \sin b - \sin c \cdot \cos b \cdot \cos A$	$\cos A = \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{tg} c$
$\sin b \cdot \cos C = \cos c \cdot \sin a - \sin c \cdot \cos a \cdot \cos B$	$\cos B = \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} c$
$\sin c \cdot \cos A = \cos a \cdot \sin b - \sin a \cdot \cos b \cdot \cos C$	$\sin c \cdot \cos A = \sin b \cdot \cos a$
$\sin c \cdot \cos B = \cos b \cdot \sin a - \sin b \cdot \cos a \cdot \cos C$	$\sin c \cdot \cos B = \sin a \cdot \cos b$
$\sin A \cdot \cos b = \cos B \cdot \sin C + \sin B \cdot \cos C \cdot \cos a$	$\cos B = \sin A \cdot \cos b$
$\sin A \cdot \cos c = \cos C \cdot \sin B + \sin C \cdot \cos B \cdot \cos a$	$\sin A \cdot \cos c = \cos B \cdot \cos a$
$\sin B \cdot \cos a = \cos A \cdot \sin C + \sin A \cdot \cos C \cdot \cos b$	$\cos A = \sin B \cdot \cos a$
$\sin B \cdot \cos c = \cos C \cdot \sin A + \sin C \cdot \cos A \cdot \cos b$	$\sin B \cdot \cos c = \cos A \cdot \cos b$
$\operatorname{ctg} a \cdot \sin b = \operatorname{ctg} A \cdot \sin C + \cos C \cdot \cos b$	$\sin b = \operatorname{ctg} A \cdot \operatorname{tg} a$
$\operatorname{ctg} b \cdot \sin a = \operatorname{ctg} B \cdot \sin C + \cos C \cdot \cos a$	$\sin a = \operatorname{ctg} B \cdot \operatorname{tg} b$
$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C$	$\cos a = \cos b \cdot \cos c$
$\cos C = -\cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B \cdot \cos c$	$\cos c = \operatorname{ctg} A \cdot \operatorname{ctg} B$

上表所列的是 C 为 90° 的球面直角三角形各有关公式。这些公式也可以按纳比尔法则 (Napier's Rules) 及作者所补充的球面直角三角形四联关系式法则直接写出来。首先在纸上作  图形 (图 15), 然后把球面直角三角形相邻于直角的二边分别写在图形上部的两空格内, 其余的二角及直角所对的边则以其与 90° 的差, 顺序写在图形下部的空格内。

法则 I 任一要素的正弦, 等于相邻二要素正切的乘积, 或等于相对二要素余弦的乘积。

法则 II 任意四个相联的要素, 一端要素余弦与其相邻要素正弦的乘积, 等于另端要素余弦与其相邻要素正弦的乘积。

根据上述两个法则写出的 C 为 90° 的球面直角三角形 ABC 的各公式, 是和从球面任意三角形各公式所导出的一样。

根据法则写出的公式 $C=90^\circ$	球面直角三角形公式 $C=90^\circ$
$\sin a = \cos(90^\circ - A) \cdot \cos(90^\circ - C)$	$\sin a = \sin A \cdot \sin C$
$\sin a = \operatorname{tg}(90^\circ - B) \cdot \operatorname{tg} b$	$\sin a = \operatorname{ctg} B \cdot \operatorname{tg} b$
$\sin b = \cos(90^\circ - A) \cdot \cos(90^\circ - C)$	$\sin b = \sin B \cdot \sin C$
$\sin b = \operatorname{tg}(90^\circ - A) \cdot \operatorname{tg} a$	$\sin b = \operatorname{ctg} A \cdot \operatorname{tg} a$
$\sin(90^\circ - C) = \cos a \cdot \cos b$	$\cos c = \cos a \cdot \cos b$
$\sin(90^\circ - C) = \operatorname{tg}(90^\circ - A) \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - B)$	$\cos c = \operatorname{ctg} A \cdot \operatorname{ctg} B$
$\sin(90^\circ - A) = \cos(90^\circ - B) \cdot \cos a$	$\cos A = \sin B \cdot \cos a$
$\sin(90^\circ - A) = \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{ctg} c$	$\cos A = \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{ctg} c$
$\sin(90^\circ - B) = \cos(90^\circ - A) \cdot \cos b$	$\cos B = \sin A \cdot \cos b$
$\sin(90^\circ - B) = \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - C)$	$\cos B = \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{ctg} c$
$\cos a \cdot \sin b = \cos(90^\circ - C) \cdot \sin(90^\circ - A)$	$\cos a \cdot \sin b = \sin C \cdot \cos A$
$\cos b \cdot \sin(90^\circ - A) = \cos(90^\circ - B) \cdot \sin(90^\circ - C)$	$\cos b \cdot \cos A = \sin B \cdot \cos C$
$\cos(90^\circ - A) \cdot \sin(90^\circ - C) = \cos a \cdot \sin(90^\circ - B)$	$\sin A \cdot \cos C = \cos a \cdot \cos B$
$\cos(90^\circ - C) \cdot \sin(90^\circ - B) = \cos b \cdot \sin a$	$\sin C \cdot \cos B = \cos b \cdot \sin a$
$\cos(90^\circ - B) \cdot \sin a = \cos(90^\circ - A) \cdot \sin b$	$\sin B \cdot \sin a = \sin A \cdot \sin b$

实际的应用中, 没有必要写出所有的公式, 只要根据已知的要素, 按法则写出含有所求的要素的公式便可。例如球面直角三角形 ABC ,

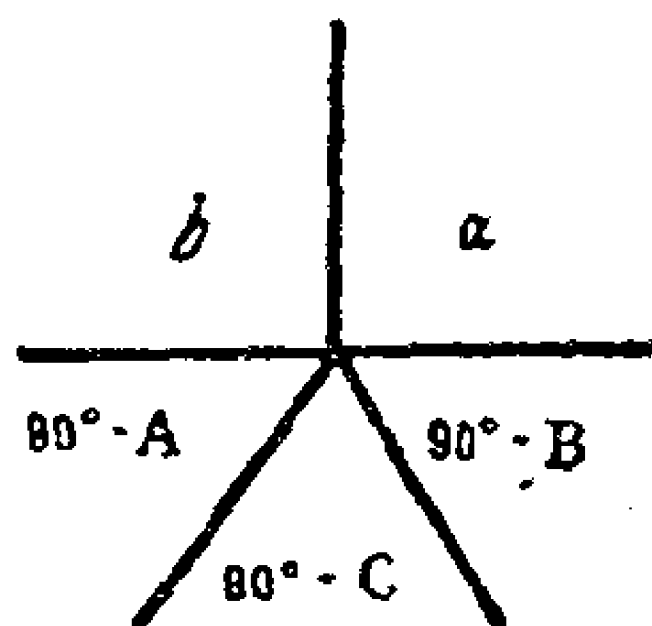
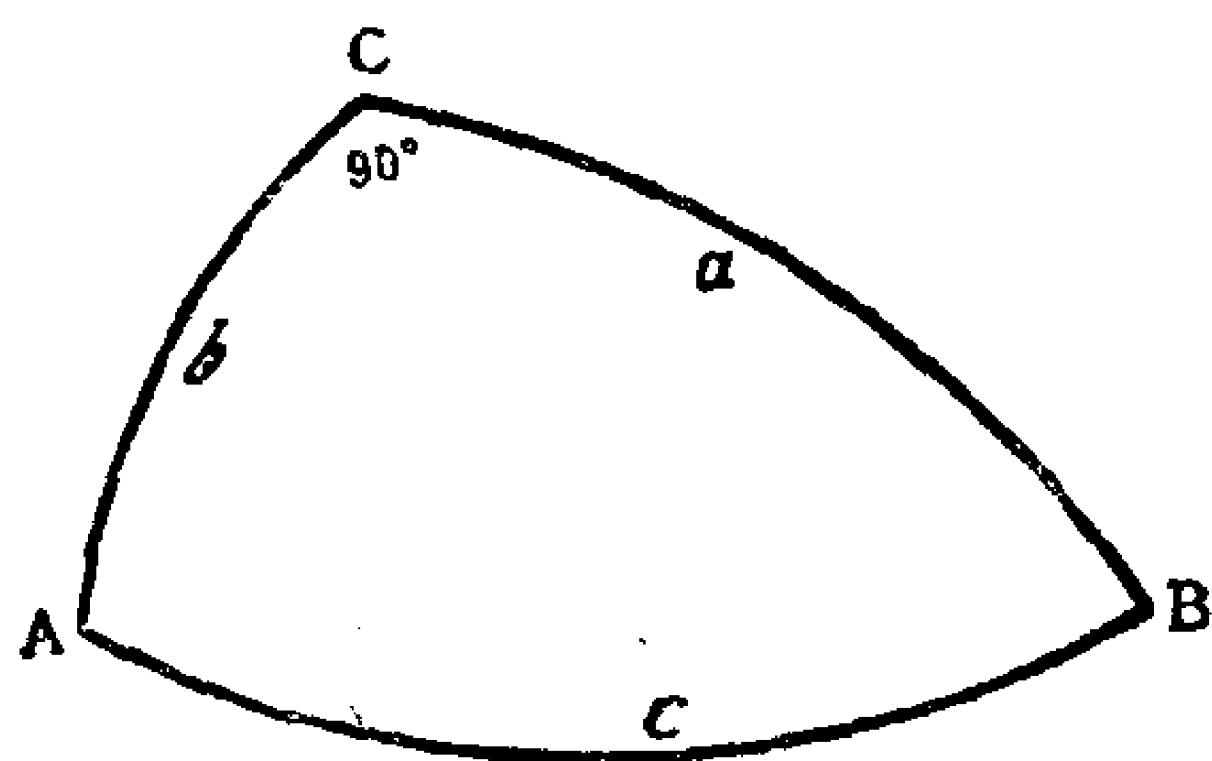



圖 15

$B = 90^\circ$, 已知 a 及 C , 求 A 角并写出 A 与三个边的关系。

首先作  图形 (圖 16), 在空格中按法則的規定順序列入各要素。

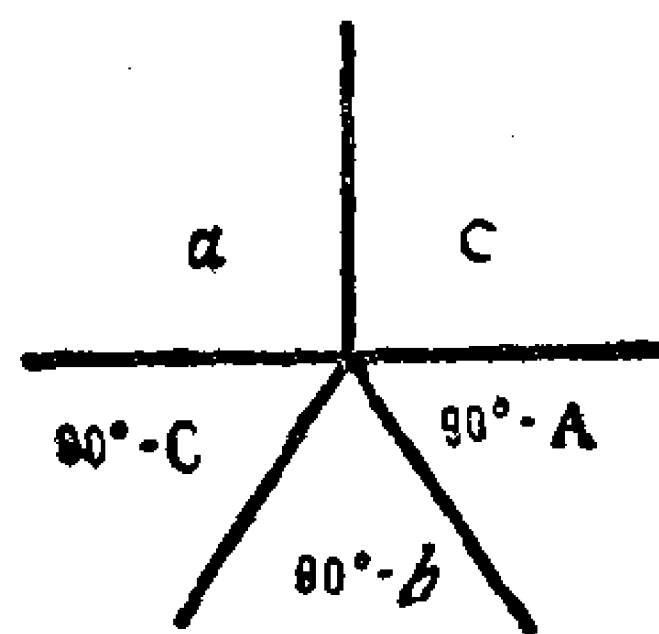
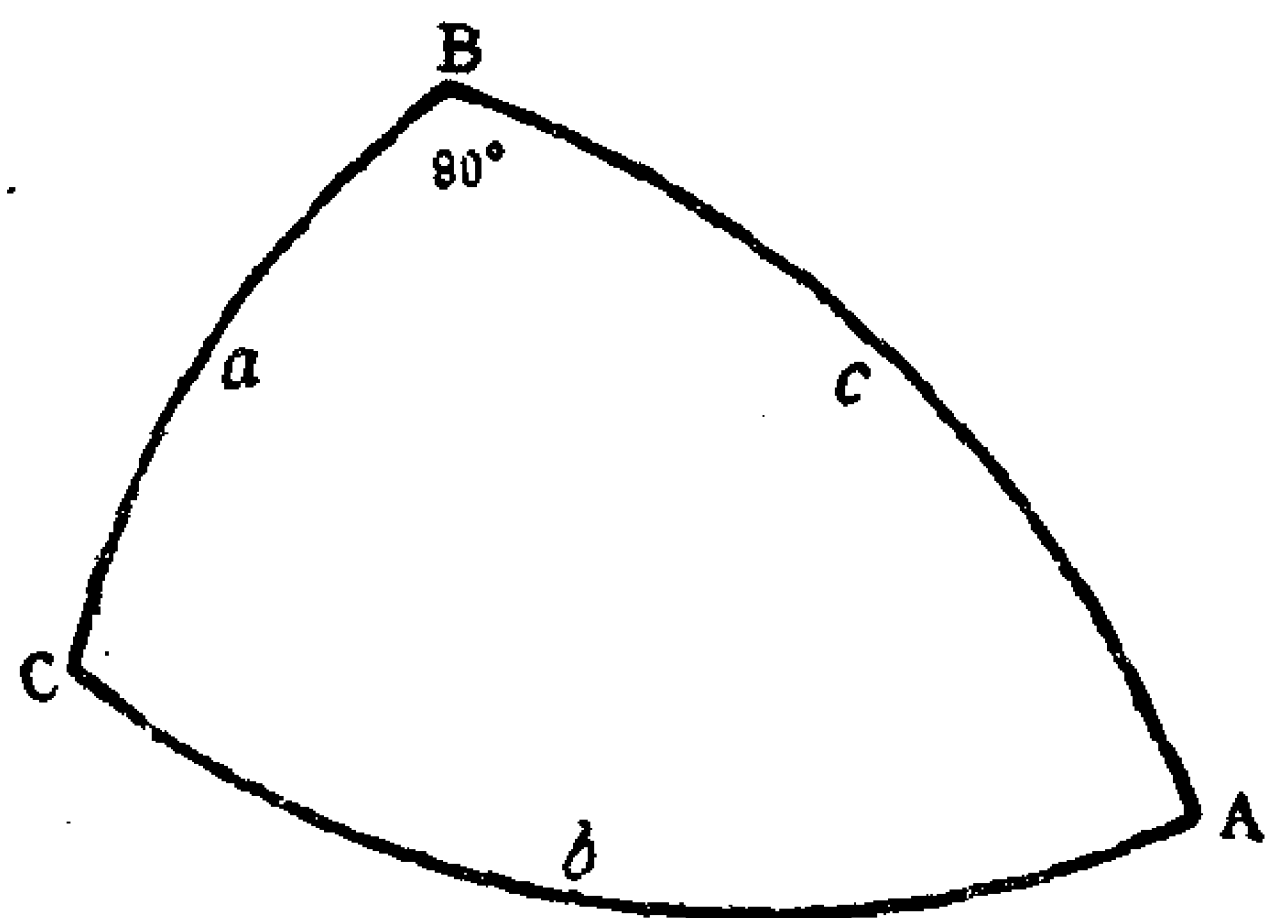


圖 16

然后根据法則得

$$\sin(90^\circ - A) = \cos a \cdot \cos(90^\circ - C) \quad \text{即} \quad \cos A = \cos a \cdot \sin C$$

$$\cos a \cdot \sin c = \cos(90^\circ - b) \cdot \sin(90^\circ - A) \quad \text{即} \quad \cos A = \cos a \cdot \csc b \cdot \sin c$$

5.2 球面直角三角形各要素的关系

球面直角三角形的要素間的关系, 虽然沒有平面直角三角形那样單純, 但也不是完全沒有規律可以掌握。我們可以从球面直角三角形的公式的分析, 得出这些要素彼此間的关系。

設球面直角三角形 ABC , $C = 90^\circ$, 根据法則得

$$\csc c = \cos a \cdot \cos b$$

当 $C < 90^\circ$, $\cos c$ 为正值, 即 $\cos a \cdot \cos b$ 的积必为正值, 这只有当 a 与 b 位于同一象限时, 才有可能; 若 $C > 90^\circ$, $\cos c$ 为负值, 即 $\cos a, \cos b$ 的积必为负值, 那么, a 与 b 就要位于不同的象限。我们可将以上情况归纳如下表:

c	$<90^\circ$	$<90^\circ$	$>90^\circ$	$>90^\circ$
a	$<90^\circ$	$>90^\circ$	$<90^\circ$	$>90^\circ$
b	$<90^\circ$	$>90^\circ$	$>90^\circ$	$<90^\circ$

由这个表可以清楚地看出球面直角三角形要素间的第一个关系是:

对直角的边小于 90° , 则其他二边位于同一象限; 对直角的边大于 90° , 则其他二边位于不同象限。

根据法则, 又可有公式

$$\cos A = \sin B \cdot \cos a$$

由于 B 小于 180° 而大于 0° , 因此 $\sin B$ 恒为正值且小于 1, 这样就使式中的 $\cos A$ 与 $\cos a$ 必须是同号且 $\cos A$ 必小于 $\cos a$, 故

$$a \leq A < 90^\circ$$

$$a \geq A > 90^\circ$$

同理

$$b \leq B < 90^\circ$$

$$b \geq B > 90^\circ$$

所以球面直角三角形要素间的第二个关系是:

直角的邻边与其所对的角, 恒位于同一象限; 角小于 90° , 则边小于或等于所对的角, 角大于 90° , 则边大于或等于所对的角。

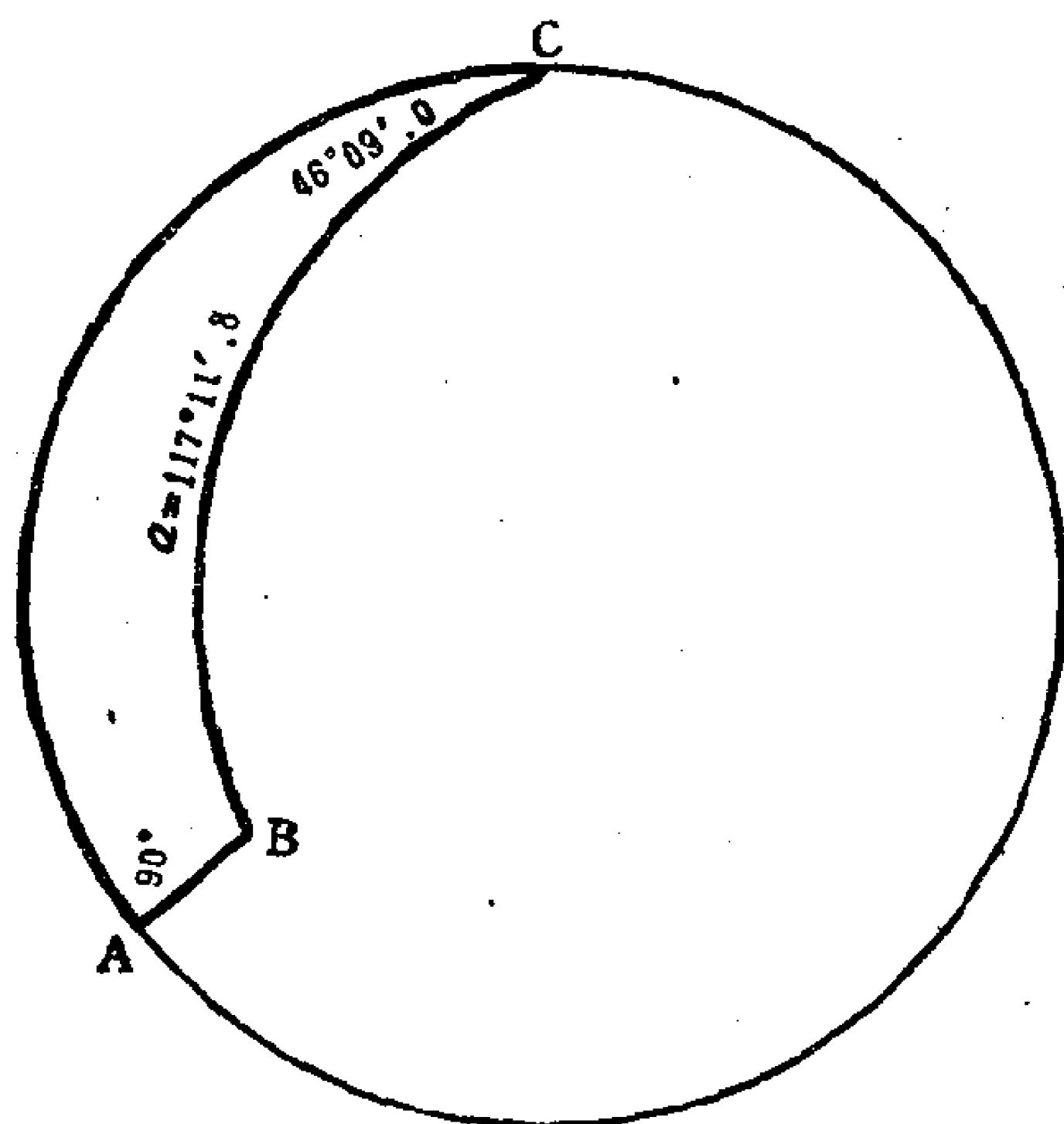
明了这些关系之后, 遇到解球面直角三角形必须用正弦函数定值的时候, 就有可能在两个解之中, 选择出适合于问题的解。

例题 17. 设球面直角三角形 ABC , $A=90^\circ$, $C=46^\circ 09' .0$, $a=117^\circ 11' .8$. 解该球面直角三角形。

解 首先分析该球面直角三角形要素间的关系。已知对直角的边, $a=117^\circ 11' .8$, 即 $a > 90^\circ$, 根据 5.2 的分析, 可知其余二边应位于不同象限。但 c 必

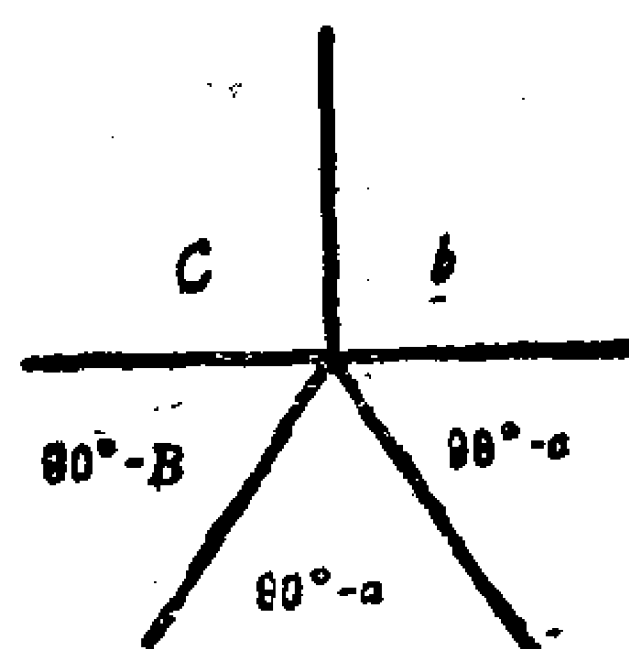
須與 C 位於同一象限，而 $C < 90^\circ$ ，故知 $c \leq C < 90^\circ$ ，而 $b \geq B > 90^\circ$ 。

分析了各要素的關係之後，按解球面直角三角形的法則作圖，並列出解該球面直角三角形的公式，然後進行計算。



(例題 17 附圖)

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ctg} B &= \operatorname{tg} C \cdot \cos a \\ \operatorname{tg} b &= \cos C \cdot \operatorname{tg} a \\ \sin c &= \sin C \cdot \sin a \\ &= \operatorname{ctg} B \cdot \operatorname{tg} b \end{aligned} \right\}$$



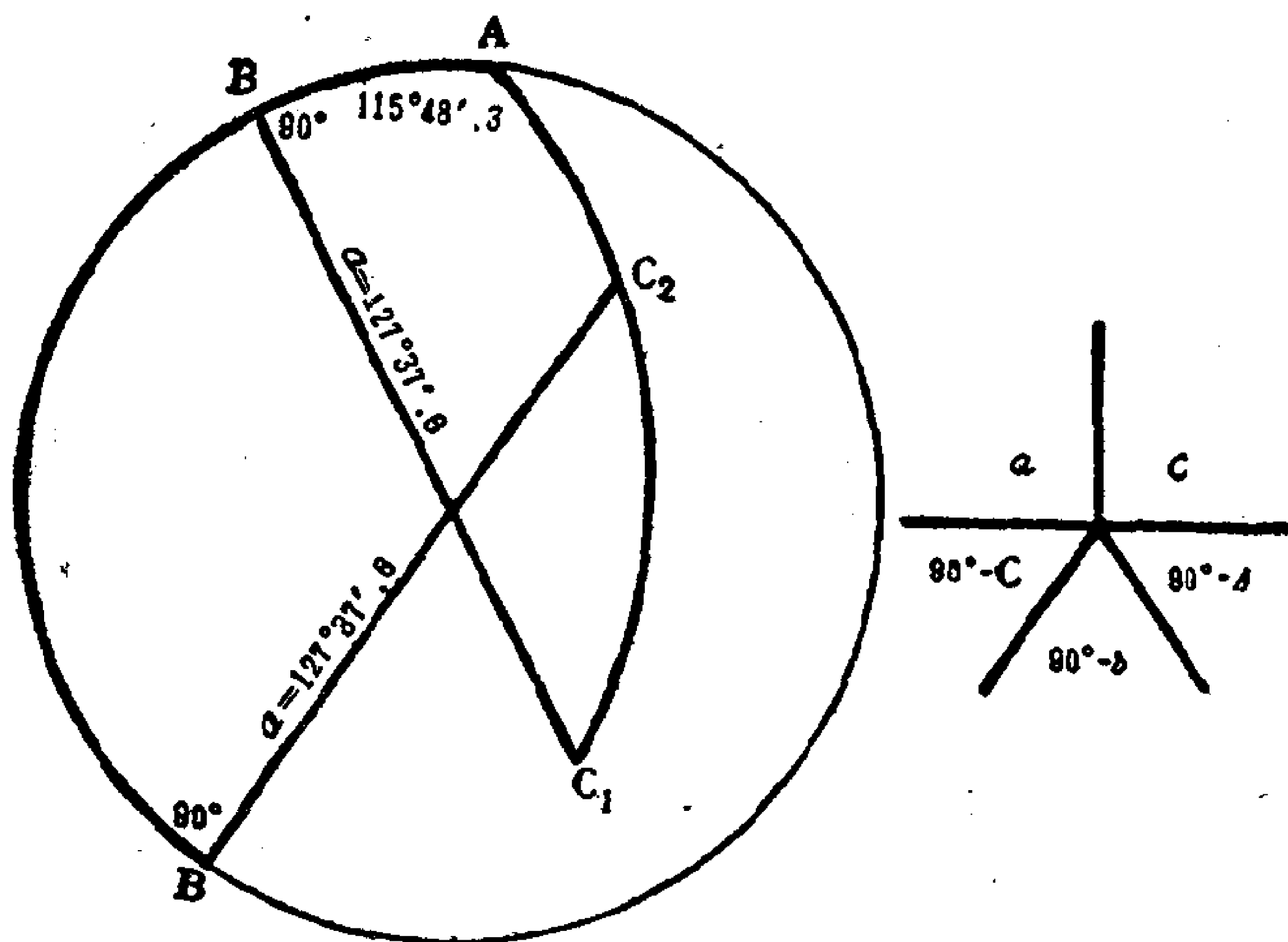
$C = 46^\circ 09' 0$	$L \operatorname{tg} 0.01744$	$L \cos 9.84059$	$L \sin 9.85803$
$a = 117^\circ 11' 8$	$L \cos 9.65996 \text{ n}$	$L \operatorname{tg} 0.28916 \text{ n}$	$L \sin 9.94913$
$B = 115^\circ 26' 6$	$L \operatorname{ctg} 9.67740 \text{ n}$		
$b = 126^\circ 33' 9$	$L \operatorname{tg} 0.12975 \text{ n}$	$L \operatorname{tg} 0.12975 \text{ n}$	
$c = 39^\circ 54' 0$	$L \sin 9.80715$	\longleftrightarrow	$L \sin 9.80716$

例題 18. 設球面直角三角形 ABC , $B = 90^\circ$, $A = 115^\circ 48' 3$, $a = 127^\circ 37' 6$, 解該球面直角三角形。

解

$$\left. \begin{aligned} \sin C &= \cos A \cdot \sec a \\ \sin b &= \csc A \cdot \sin a \\ \sin c &= \operatorname{ctg} A \cdot \operatorname{tg} a \\ &= \sin C \cdot \sin b \end{aligned} \right\}$$

$A = 115^\circ 48' 3$	$L \cos 9.63880 \text{ n}$	$L \csc 0.04562$	$L \operatorname{ctg} 9.68442 \text{ n}$
$a = 127^\circ 37' 6$	$L \sec 0.21430 \text{ n}$	$L \sin 9.89875$	$L \operatorname{tg} 0.11303 \text{ n}$
$C_1 = 45^\circ 28' 9$ $C_2 = 134^\circ 31' 1$	$L \sin 9.85310$		



(例題 18 附圖)

$$b_1=118^\circ 23.'4 \quad b_2=61^\circ 36.'6 \quad \frac{L \sin 9.94435}{L \sin 9.94435}$$

$$c_1=38^\circ 50.'9 \quad c_2=141^\circ 09.'1 \quad \frac{L \sin 9.79745}{L \sin 9.79745} \leftarrow \text{—————} \rightarrow$$

例題 19. 設球面直角三角形 ABC , $C=90^\circ$, $b=90^\circ 58.'8$, $c=89^\circ 17.'5$, 求 B 角的值。

解

$$\sin B = \sin b \cdot \csc c$$

$$b=90^\circ 58.'8 \quad L \sin 9.99994$$

$$c=89^\circ 17.'5 \quad \frac{L \csc 0.00003}{L \sin 9.99997}$$

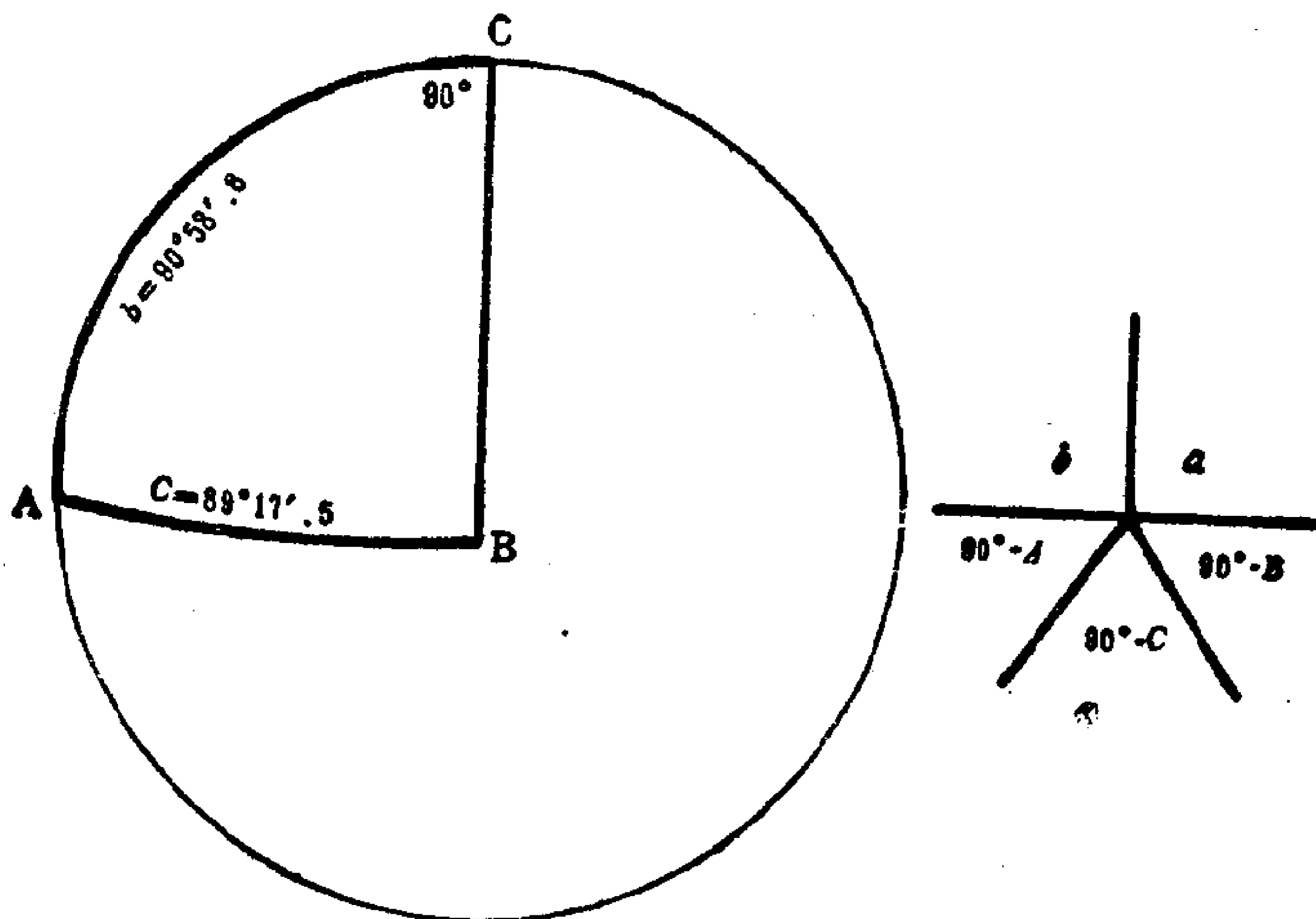
$$90^\circ 37.'0 < B < 90^\circ 43.'0 \quad L \sin 9.99997$$

这个例題說明当所求的值接近 90° 时, 用正弦函数定值是困难的。

在此种情况下, 必須利用 $\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{B}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1+\sin B}{1-\sin B}}$ 的关系, 进行

演算, 才可解得确切的 B 角的值。演算方法如下:

$$\text{今} \quad \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{B}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1+\sin B}{1-\sin B}}$$



(例題 19 附圖)

但

$$\sin B = \sin b \cdot \csc c$$

所以

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{B}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \sin b \cdot \csc c}{1 - \sin b \cdot \csc c}}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(c+b) \cdot \cos \frac{1}{2}(c-b)}{\sin \frac{1}{2}(c-b) \cdot \cos \frac{1}{2}(c+b)}}$$

$$= \pm \sqrt{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(c+b) \cdot \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(c-b)}$$

$$c = 89^\circ 17' 30'' \quad \frac{c}{2} = 44^\circ 38' 45''$$

$$b = 90^\circ 58' 48'' \quad \frac{b}{2} = 45^\circ 29' 24''$$

$$\frac{1}{2}(c+b) = 90^\circ 08' 09'' \quad L \operatorname{tg} 2.52512 n$$

$$\frac{1}{2}(c-b) = -00^\circ 50' 39'' \quad L \operatorname{ctg} 1.83166 n$$

$$2L \operatorname{tg} 4.45678$$

$$45^{\circ} + \frac{B}{2} = 89^{\circ}39'41'' \text{ 或 } 90^{\circ}20'19'' \quad \text{Ltg } 2.22839^{\circ}$$

$$B = 89^{\circ}19'22'' \text{ 或 } 90^{\circ}40'38''$$


因 $b > 90^{\circ}$, 所以 $B > 90^{\circ}$, $B = 90^{\circ}40'38''$

5.3 球面直边三角形公式

球面直边三角形的有关公式, 可以通过极线三角形的关系, 由球面直角三角形各公式导出:

極綫三角形 $A'B'C', C'=90^{\circ}$	球面直边三角形 $ABC, C=90^{\circ}$
$\sin a' = \sin A' \cdot \sin C'$	$\sin A = \sin a \cdot \sin C$
$\sin a' = \text{ctg} B' \cdot \text{tg} b'$	$\sin A = \text{ctg} b \cdot \text{tg} B$
$\sin b' = \sin B' \cdot \sin C'$	$\sin B = \sin b \cdot \sin C$
$\sin b' = \text{ctg} A' \cdot \text{tg} a'$	$\sin B = \text{ctg} a \cdot \text{tg} A$
$\cos c' = \cos a \cdot \cos b'$	$\cos C = -\cos A \cdot \cos B$
$\cos C' = \text{ctg} A' \cdot \text{ctg} B'$	$\cos C = -\text{ctg} a \cdot \text{ctg} b$
$\cos A' = \sin B' \cdot \cos a'$	$\cos a = \sin b \cdot \cos A$
$\cos A' = \text{tg} b' \cdot \text{ctg} c'$	$\cos a = -\text{tg} B \cdot \text{ctg} C$
$\cos B' = \sin A' \cdot \cos b'$	$\cos b = \sin a \cdot \cos B$
$\cos B' = \text{tg} a' \cdot \text{ctg} c'$	$\cos b = -\text{tg} A \cdot \text{ctg} C$
$\cos a' \cdot \sin b' = \sin c' \cdot \cos A'$	$\cos A \cdot \sin B = \sin C \cdot \cos a$
$\cos b' \cdot \cos A' = \sin B' \cdot \cos C'$	$\cos B \cdot \cos a = -\sin b \cdot \cos C$
$\sin A' \cdot \cos C' = \cos a' \cdot \cos B$	$\sin a \cdot \cos C = -\cos A \cdot \cos b$
$\sin C' \cdot \cos B' = \cos b' \cdot \sin a$	$\sin C \cdot \cos b = \cos B \cdot \sin A$
$\sin B' \cdot \sin a' = \sin A' \cdot \sin b'$	$\sin b \cdot \sin A = \sin a \cdot \sin B$

从上表所列的球面直边三角形各公式看来, 除了一些公式多了负号之外, 其余不论形式或函数的关系都和球面直角三角形的公式相似, 因此前面的两个法则, 也基本上可以适用到球面直边三角形。

今将球面直边三角形相邻于直边的两个角分别写在  图形 (图 17) 上部两空格内, 其余的二边及直边所对的角则以其与 90° 的差顺序写在图形下部的空格内。于是

法则 I 任一要素的正弦, 等于相邻二要素正切的乘积, 或等于相

对二要素余弦的乘积。若乘积的要素为同类，公式前应添一负号。

·法则II 任意四个相联的要素，一端要素余弦与其相邻要素正弦的乘积，等于另端要素余弦与其相邻要素正弦的乘积。若相联的四个要素包括有图形下部的三个要素，公式前应添一负号。

根据上述两法则写出 C 为 90° 的球面直边三角形各公式，和上表所列的完全相同。即

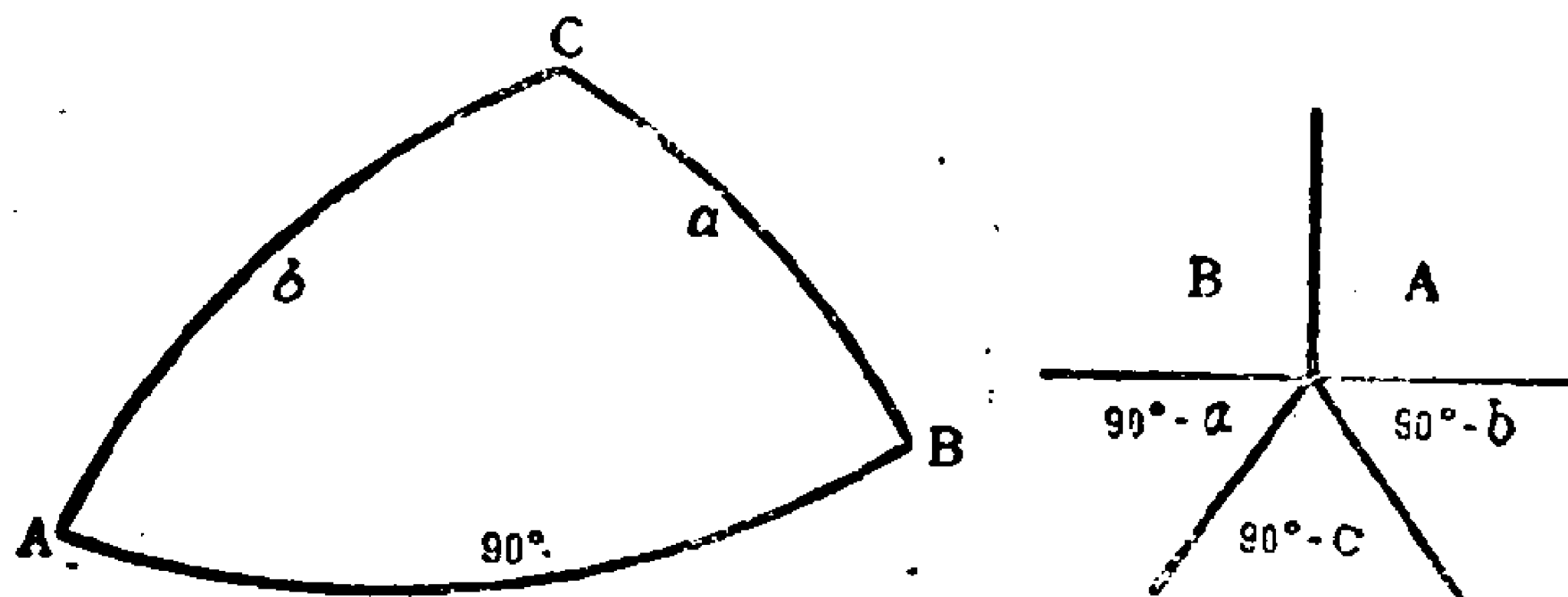


圖 17

根据法则写出的公式 $C=90^\circ$	球面直边三角形公式 $C=90^\circ$
$\sin A = \cos(90^\circ - a) \cdot \cos(90^\circ - C)$	$\sin A = \sin a \cdot \sin C$
$\sin A = \operatorname{tg}(90^\circ - b) \cdot \operatorname{tg} B$	$\sin A = \operatorname{ctg} b \cdot \operatorname{tg} B$
$\sin B = \cos(90^\circ - b) \cdot \cos(90^\circ - C)$	$\sin B = \sin b \cdot \sin C$
$\sin B = \operatorname{tg}(90^\circ - a) \cdot \operatorname{tg} A$	$\sin B = \operatorname{ctg} a \cdot \operatorname{tg} A$
$\sin(90^\circ - C) = -\cos A \cdot \cos B$	$\cos C = -\cos A \cdot \cos B$
$\sin(90^\circ - C) = -\operatorname{tg}(90^\circ - a) \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - b)$	$\cos C = -\operatorname{ctg} a \cdot \operatorname{ctg} b$
$\sin(90^\circ - a) = \cos(90^\circ - b) \cdot \cos A$	$\cos a = \sin b \cdot \cos A$
$\sin(90^\circ - a) = -\operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - C)$	$\cos a = -\operatorname{tg} B \cdot \operatorname{ctg} C$
$\sin(90^\circ - b) = \cos(90^\circ - a) \cdot \cos B$	$\cos b = \sin a \cdot \cos B$
$\sin(90^\circ - b) = -\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - C)$	$\cos b = -\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{ctg} C$
$\cos A \cdot \sin B = \cos(90^\circ - C) \cdot \sin(90^\circ - a)$	$\cos A \cdot \sin B = \sin C \cdot \cos a$
$\cos B \cdot \sin(90^\circ - a) = -\cos(90^\circ - b) \cdot \sin(90^\circ - C)$	$\cos B \cdot \cos a = -\sin b \cdot \cos C$
$\cos(90^\circ - a) \cdot \sin(90^\circ - C) = -\cos A \cdot \sin(90^\circ - b)$	$\sin a \cdot \cos C = -\cos A \cdot \cos b$
$\cos(90^\circ - C) \cdot \sin(90^\circ - b) = \cos B \cdot \sin A$	$\sin C \cdot \cos b = \cos B \cdot \sin A$
$\cos(90^\circ - b) \cdot \sin A = \cos(90^\circ - a) \cdot \sin B$	$\sin b \cdot \sin A = \sin a \cdot \sin B$

5.4 球面直边三角形各要素的关系

設球面直边三角形, ABC , $C = 90^\circ$, 根据法則得

$$\cos C = -\cos A \cdot \cos B$$

当 $C < 90^\circ$, $\cos C$ 为正值, 因为公式前有一負号, 所以 $\cos A \cdot \cos B$ 的积应为負值, 即 A 与 B 必須位于不同象限; 当 $C > 90^\circ$, $\cos C$ 为負值, $\cos A \cdot \cos B$ 的积应为正值, 即 A 与 B 必須位于同一象限。这些可以由下表来表示:

C	$<90^\circ$	$<90^\circ$	$>90^\circ$	$>90^\circ$
A	$<90^\circ$	$>90^\circ$	$<90^\circ$	$>90^\circ$
B	$>90^\circ$	$<90^\circ$	$<90^\circ$	$>90^\circ$

这里可以看出球面直边三角形要素間的第一个关系是:

对直边的角小于 90° , 則其他二角位于不同象限; 对直边的角大于 90° , 則其他二角位于同一象限。

根据法則, 又可有公式

$$\cos a = \sin b \cdot \cos A$$

由于 b 小于 180° 而大于 0° , 所以 $\sin b$ 恆为正值且小于 1, 即 $\cos a$ 必小于 $\cos A$ 且为同号, 故

$$A \leq a < 90^\circ$$

$$A \geq a > 90^\circ$$

同理

$$B \leq b < 90^\circ$$

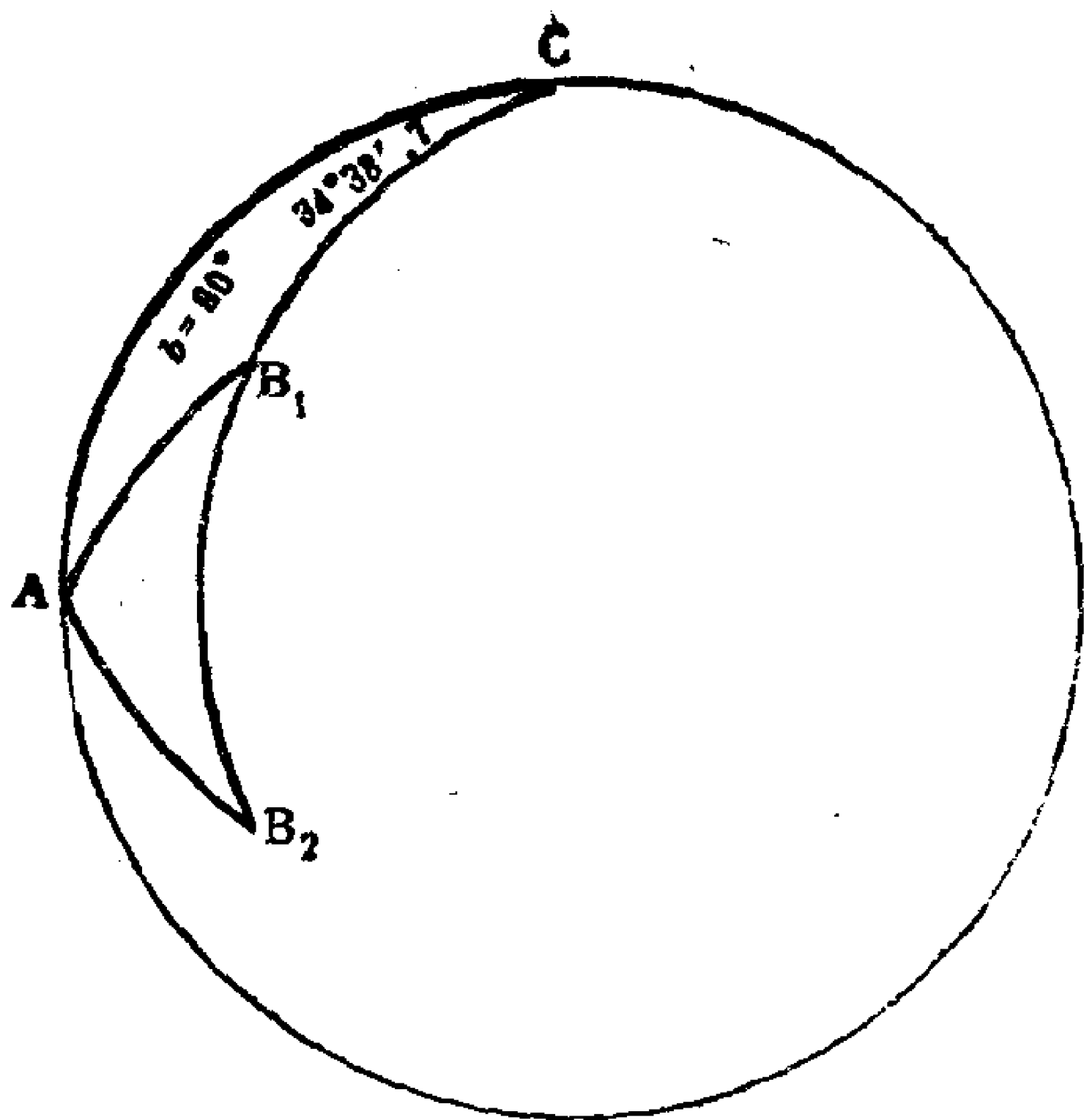
$$B \geq b > 90^\circ$$

所以球面直边三角形要素間第二个关系是

直边的鄰角与其所对的边位于同一象限; 边小于 90° , 則角小于或等于所对的边, 边大于 90° , 則角大于或等于所对的边。

例題 20. 設球面直边三角形 ABC , $b = 90^\circ$, $c = 43^\circ 19'.6$, $C = 34^\circ 38'.7$, 解該球面直边三角形。

解



$$\sin a = \cos c \cdot \sec C$$

$$\sin B = \csc c \cdot \sin C$$

$$\sin A = \operatorname{ctg} c \cdot \operatorname{tg} C$$

$$= \sin a \cdot \sin B$$

(例題 20 附圖)

$c = 43^{\circ}19'.6$	$L\cos 9.86181$	$L\csc 0.16358$	$L\operatorname{ctg} 0.02538$
$C = 34^{\circ}38'.7$	$L\sec 0.08476$	$L\sin 9.75472$	$L\operatorname{tg} 9.83949$
$a_1 = 62^{\circ}12'.2$	$a_2 = 117^{\circ}47'.8$	$L\sin 9.94657$	$L\sin 9.94657$
$B_1 = 124^{\circ}03'.3$	$B_2 = 55^{\circ}56'.7$	$L\sin 9.91830$	$L\sin 9.91830$
$A_1 = 47^{\circ}06'.3$	$A_2 = 132^{\circ}53'.7$	$L\sin 9.86487$	$L\sin 9.86487$

例題 21. 設球面直邊三角形 ABC , $a = 90^{\circ}$, $A = 167^{\circ}23'$, $B = 12^{\circ}31'$, 求該球面直邊三角形 C 角的值。

解

$$\cos C = -\cos A \cdot \sec B$$

$$A = 167^{\circ}23' \quad L\cos 9.98938 \text{ n}$$

$$B = 12^{\circ}31' \quad L\sec 0.01045$$

$$01^{\circ}35' < C < 01^{\circ}37' \quad -L\cos 9.99983 \text{ n}$$

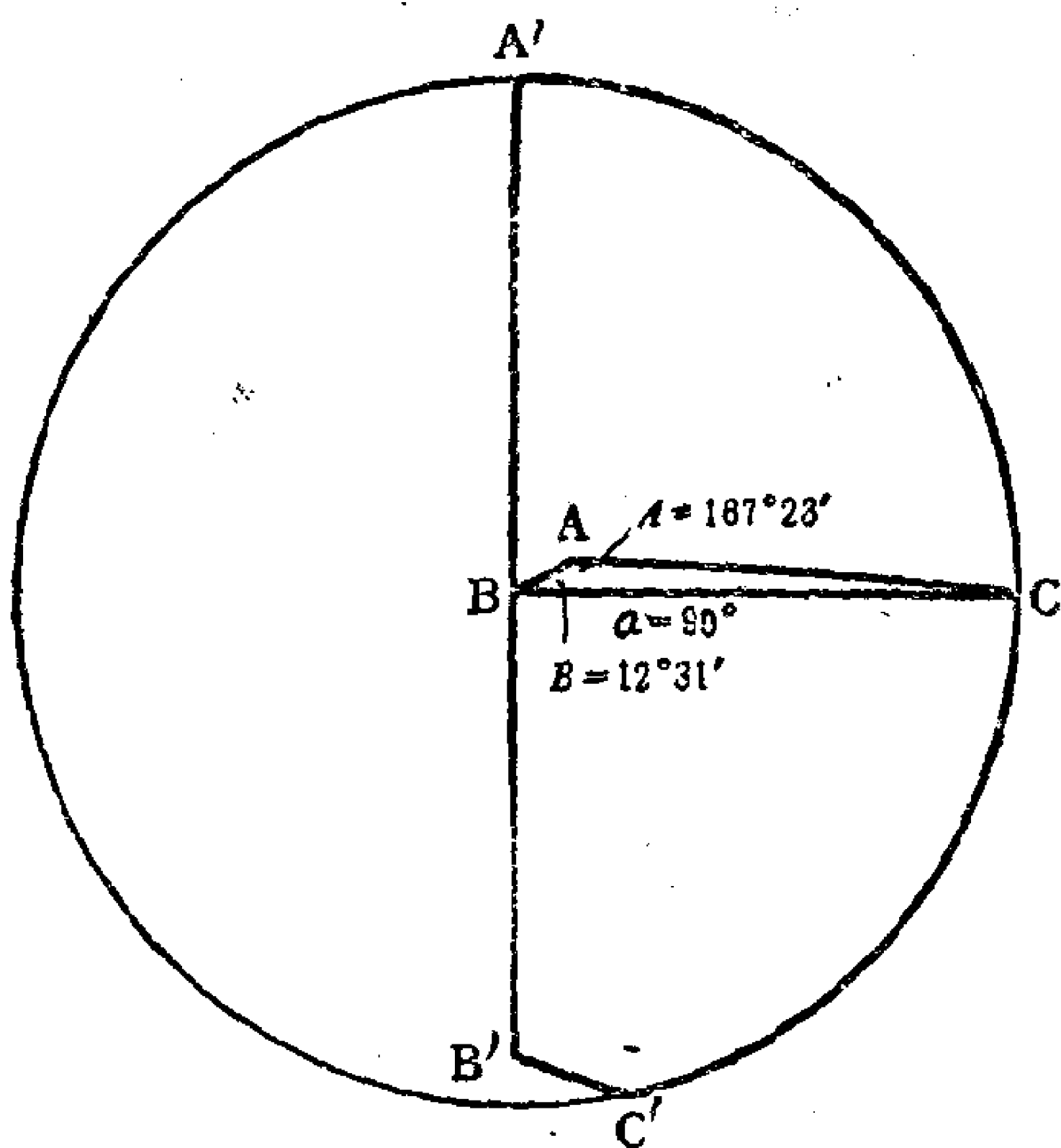
由于所求的 C 角相当小, 余弦函数不能定出确切的值。遇到此类情况时, 可以利用 $\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos C}{1+\cos C}}$ 的关系, 用正切函数来进行定值。

今

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos C}{1+\cos C}}$$

但

$$\cos C = -\cos A \cdot \sec B$$



(例題 21 附圖)

所以

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos A \cdot \sec B}{1 - \cos A \cdot \sec B}}$$

$$= \sqrt{\operatorname{ctg} \frac{1}{2}(A+B) \cdot \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(A-B)}$$

$$A = 167^{\circ}23' \quad \frac{A}{2} = 83^{\circ}41'30''$$

$$B = 12^{\circ}31' \quad \frac{B}{2} = 6^{\circ}15'30''$$

$$\frac{1}{2}(A+B) = 89^{\circ}57'00'' \quad L \operatorname{ctg} 6.94085$$

$$\frac{1}{2}(A-B) = 77^{\circ}26'00'' \quad L \operatorname{ctg} 9.34814$$

$$2 L \operatorname{tg} 16.28899$$

$$C = 01^{\circ}35'54'' \quad \frac{C}{2} = 00^{\circ}47'57'' \quad L \operatorname{tg} 8.14450$$

§6. 球面初等三角形

6.1 小角度的三角函数

根据馬卡罗林定理 (Maclaurin's Theorem) 可將正弦、余弦、正切

等函数展成無穷級数

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \dots$$

式中 x 的單位为弧度。当 x 的值相当小，且对 x 的精确度要求不是十分严格的情况下，采用上述級数的近似式，即

$$\sin x = x \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} \qquad \operatorname{tg} x = x$$

对于簡化演算是十分有利的。下表給出它的誤差范围：

$x - \sin x =$	$x =$	$1 - \cos x =$	$x =$	$\operatorname{tg} x - x =$	$x =$
$0^\circ.1$	$12^\circ 33'$	0.1	$25^\circ 51'$	$0^\circ.1$	$9^\circ 57'$
$1'.0$	$6^\circ 54'$	0.01	$8^\circ 57'$	$1'.0$	$5^\circ 29'$
$1'',0$	$1^\circ 46'$	0.001	$2^\circ 34'$	$1'',0$	$1^\circ 24'$

6.2 小的球面初等三角形

設小的球面初等三角形 ABC 的三边都相当的小，則在一定的誤差范围内，下面的等式是允許的：

$$\begin{aligned} \sin a &= a & \sin b &= b & \sin c &= c \\ \cos a &= 1 - \frac{a^2}{2} & \cos b &= 1 - \frac{b^2}{2} & \cos c &= 1 - \frac{c^2}{2} \end{aligned}$$

所以球面正弦公式

$$\frac{\sin \alpha}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

应用到小的球面初等三角形，由于 a 、 b 和 c 都相当的小，公式可以写成

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \tag{19}$$

这和平面三角形的正弦公式是沒有分別的。

同理球面余弦公式可以写成

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2a \cdot c \cdot \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos C \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

球面五联关系式可以写成

$$\left. \begin{aligned} a &= b \cdot \cos C + c \cdot \cos B \\ b &= a \cdot \cos C + c \cdot \cos A \\ c &= a \cdot \cos B + b \cdot \cos A \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

由此可見，小的球面初等三角形，在允許的誤差範圍之內，可以視為平面三角形而进行計算。

烈然德耳定理 (Legendre's Theorem) 証明了球面初等三角形和平面三角形的关系是

$$\begin{aligned} a_1 &= aR & b_1 &= bR & c_1 &= cR & p_1 &= pR \\ A_1 &= A - \frac{E}{3} & B_1 &= B - \frac{E}{3} & C_1 &= C - \frac{E}{3} & E &= A + B + C - 180^\circ \end{aligned}$$

这里的 a, b, c, A, B, C 是球面初等三角形的边与角， R 是球的半徑， $a_1, b_1, c_1, A_1, B_1, C_1$ 是平面三角形的边与角。这两个三角形的圖形如下：

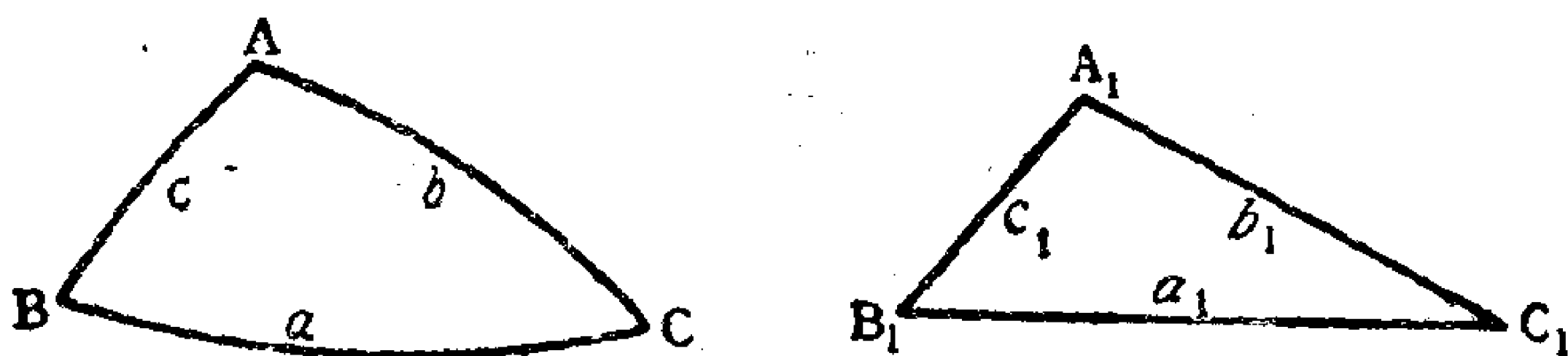


圖 18

球面初等三角形的角与平面三角形的对应角的差是球面角盈的三分之一，这个关系是需要証明的。

由三角公式有

$$\sin \frac{A - A_1}{2} = \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A_1}{2} - \cos \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{A_1}{2}$$

但
$$\sin \frac{A_1}{2} = \sqrt{\frac{(p_1 - b_1) \cdot (p_1 - c_1)}{b_1 \cdot c_1}}$$

$$\cos \frac{A_1}{2} = \sqrt{\frac{p_1 \cdot (p_1 - a_1)}{b_1 \cdot c_1}}$$

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{p_1 - b_1}{R} \cdot \sin \frac{p_1 - c_1}{R}}{\sin \frac{b_1}{R} \cdot \sin \frac{c_1}{R}}}$$

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{p_1}{R} \cdot \sin \frac{p_1 - a_1}{R}}{\sin \frac{b_1}{R} \cdot \sin \frac{c_1}{R}}}$$

代入前式并化簡，則有

$$\begin{aligned} \sin \frac{A - A_1}{2} &= \frac{1}{\sqrt{b_1 c_1 \sin \frac{b_1}{R} \cdot \sin \frac{c_1}{R}}} \times \\ &\times \left[\sqrt{p_1 (p_1 - a_1) \sin \frac{p_1 - b_1}{R} \cdot \sin \frac{p_1 - c_1}{R}} - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{(p_1 - b_1)(p_1 - c_1) \sin \frac{p_1}{R} \cdot \sin \frac{p_1 - a_1}{R}} \right] \end{aligned}$$

但小角度的正弦函数第三級近似值是

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6}$$

所以
$$\sin \frac{A - A_1}{2} = \frac{1}{\sqrt{b_1 c_1 \left(\frac{b_1}{R} - \frac{b_1^3}{6R^3} \right) \left(\frac{c_1}{R} - \frac{c_1^3}{6R^3} \right)}} \times$$

$$\begin{aligned} &\times \left\{ \sqrt{p_1 (p_1 - a_1) \left[\frac{p_1 - b_1}{R} - \frac{(p_1 - b_1)^3}{6R^3} \right] \cdot \left[\frac{p_1 - c_1}{R} - \frac{(p_1 - c_1)^3}{6R^3} \right]} - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{(p_1 - b_1)(p_1 - c_1) \left(\frac{p_1}{R} - \frac{p_1^3}{6R^3} \right) \left[\frac{p_1 - a_1}{R} - \frac{(p_1 - a_1)^3}{6R^3} \right]} \right\} \end{aligned}$$

括出式中的共同項，則

$$\sin \frac{A-A_1}{2} = \frac{\sqrt{P_1(p_1-a_1)(p_1-b_1)(p_1-c_1)}}{b_1c_1\sqrt{\left(1-\frac{b_1^2}{6R^2}\right)\left(1-\frac{c_1^2}{6R^2}\right)}} \times \\ \times \left\{ \sqrt{\left[1-\frac{(p_1-b_1)^2}{6R^2}\right] \cdot \left[1-\frac{(p_1-c_1)^2}{6R^2}\right]} - \right. \\ \left. - \sqrt{\left(1-\frac{p_1^2}{6R^2}\right)\left[1-\frac{(p_1-a_1)^2}{6R^2}\right]} \right\}$$

展开上式，并以 S_1 代 $\sqrt{P_1(p_1-a_1)(p_1-b_1)(p_1-c_1)}$ ，则

$$\sin \frac{A-A_1}{2} = \frac{S_1}{6R^2} \left(1 + \frac{b_1^2+c_1^2}{12R^2} \right)$$

或

$$\frac{A-A_1}{2} = \frac{S_1}{6R^2} \cdot \csc 1''$$

即

$$A-A_1 = \frac{S_1}{3R^2} \cdot \csc 1''$$

同理

$$B-B_1 = \frac{S_1}{3R^2} \cdot \csc 1''$$

$$C-C_1 = \frac{S_1}{3R^2} \cdot \csc 1''$$

$$\text{三式的和} \quad (A+B+C)-(A_1+B_1+C_1) = \frac{S_1}{R^2} \cdot \csc 1''$$

但

$$(A_1+B_1+C_1) = 180^\circ$$

$$(A+B+C)-(A_1+B_1+C_1) = A+B+C-180^\circ \\ = E$$

即

$$\frac{S_1}{R^2} \cdot \csc 1'' = E$$

所以

$$A-A_1 = \frac{E}{3}$$

$$B-B_1 = \frac{E}{3}$$

$$C-C_1 = \frac{E}{3}$$

根据烈然德耳定理用平面三角法计算出边长 100 公里的地面三角形的角，其误差不及 $0'.1$ 。这样小量的误差，在实际应用中是完全可以被接受的。

6.3 窄的球面初等三角形

设窄的球面初等三角形 ABC ， a 比起 b 和 c 是相当的小（图19），显然 a 的对角 A 也是相当的小。

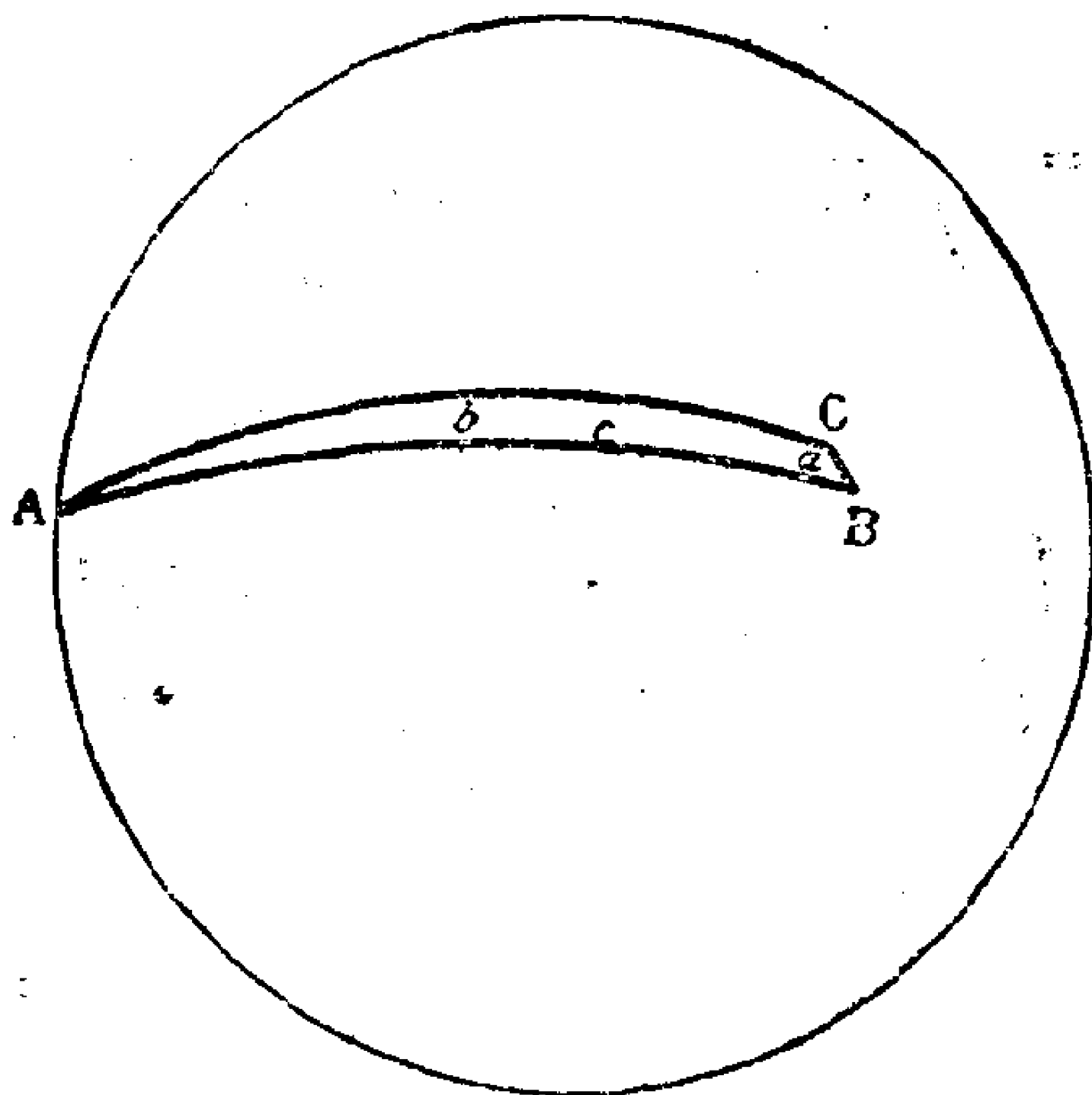


图 19

根据球面五联关系式(2)得

$$\sin a \cdot \cos B = \cos b \cdot \sin c - \sin b \cdot \cos c \cdot \cos A$$

即
$$\sin a \cdot \cos B = \sin(c-b) + 2\sin b \cdot \cos c \cdot \sin^2 \frac{A}{2}$$

因 A 是相当小， $2\sin b \cdot \cos c \cdot \sin^2 \frac{A}{2}$ 项可以忽略，于是

$$\sin(c-b) = \sin a \cdot \cos B$$

但 a 是相当小，而 $(c-b)$ 的差也很小，所以 $(c-b)$ 的第一次近似式可以写成

$$(c-b)_1 = a \cdot \cos B \quad (22a)$$

又根据球面正弦公式(1)有

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin a}{\sin b}$$

因 A 及 a 都相当小, 所以

$$A = a \cdot \frac{\sin B}{\sin b}$$

但

$$b = c - (c - b)$$

所以

$$\begin{aligned} A &= a \frac{\sin B}{\sin[c - (c - b)]} = \\ &= \frac{a \sin B}{\sin c \cdot \cos(c - b) - \cos c \cdot \sin(c - b)} \end{aligned}$$

因 $(c - b)$ 的差很小, 所以 $\cos(c - b) = 1$, $\sin(c - b) = (c - b)$

$$\begin{aligned} A &= \frac{a \sin B}{\sin c - (c - b) \cdot \cos c} = \\ &= \frac{a \sin B}{\sin c} \cdot [1 - (c - b) \operatorname{ctg} C]^{-1} \end{aligned}$$

展开 $[1 - (c - b) \operatorname{ctg} c]^{-1}$, 并忽略二次及二次以上的项, 则

$$A = \frac{a \sin B}{\sin c} + \frac{a(c - b) \cdot \sin B \cdot \operatorname{ctg} C}{\sin c} \quad (23)$$

当 c 比起 a 是相当大, 而 a 和 A 又是相当小的情况下,

$\frac{a(c - b) \cdot \sin B \cdot \operatorname{ctg} C}{\sin c}$ 项可以忽略, 于是 A 的第一次近似可以写成

$$A_1 = \frac{a \sin B}{\sin c} \quad (24a)$$

现在再来研究 $(c - b)$ 及 A 的第二次近似。

已知 $\sin(c - b) = \sin a \cdot \cos B - 2 \sin b \cdot \cos c \cdot \sin^2 \frac{A}{2}$

由于 $(c - b)$, a 及 A 都相当小, 所以 $(c - b)$ 的第二次近似可以写成

$$(c - b)_2 = a \cos B - \frac{A^2}{2} \cdot \sin b \cdot \cos C$$

但由式(22a)得 $a \cos B = (c - b)_1$

由式(24a)及球面正弦公式得

$$A^2 = \frac{a \cdot \sin B}{\sin c} \cdot \frac{a \cdot \sin B}{\sin b}$$

$$\begin{aligned}\text{所以 } (c-b)_2 &= (c-b)_1 - \frac{1}{2} \sin b \cdot \cos C \cdot \frac{a \cdot \sin B}{\sin c} \cdot \frac{a \cdot \sin B}{\sin b} = \\ &= (c-b)_1 - \frac{a^2}{2} \sin^2 B \cdot \operatorname{ctg} C\end{aligned}\quad (22b)$$

$$\text{由式(23)得} \quad A = \frac{a \sin B}{\sin c} + \frac{a(c-b) \cdot \sin B \cdot \operatorname{ctg} C}{\sin c}$$

恒 $\frac{a \sin B}{\sin c} = A_1$ (24a), $(c-b) = a \cos B$ (22a), 所以 A 的第二次近似

$$\begin{aligned}A_2 &= A_1 + a \cdot a \cos B \cdot \sin B \cdot \operatorname{ctg} c \cdot \csc c \\ &= A_1 + \frac{a^2}{2} \cdot \sin 2B \cdot \operatorname{ctg} c \cdot \csc c\end{aligned}\quad (24b)$$

$$\text{或} \quad A_2 \cdot \sin c = A_1 \cdot \sin c + \frac{a^2}{2} \cdot \sin 2B \cdot \operatorname{ctg} c.$$

由球面五联关系式, 有

$$\sin A \cdot \cos c = \cos C \cdot \sin B + \sin C \cdot \cos B \cdot \cos a$$

$$\text{或} \quad \sin A \cdot \cos c = \sin(C+B) - 2 \sin C \cdot \cos B \sin^2 \frac{a}{2}$$

由于 A 及 a 是相当小, $\sin A = A$, $\sin^2 \frac{a}{2}$ 的项可以忽略, 于是

$$\begin{aligned}A \cdot \cos c &= \sin(C+B) \\ &= \sin(C_{\pi}-B)\end{aligned}$$

式中的 C_{π} 为 C 的外角, 即 $C_{\pi} = 180^\circ - C$ 。当 a 是足够小, 则 $(C_{\pi}-B)$ 的差亦相当小, 于是 $\sin(C_{\pi}-B) = (C_{\pi}-B)$, 所以 $(C_{\pi}-B)$ 的第一近似

$$(C_{\pi}-B)_1 = A \cdot \cos c \quad (25a)$$

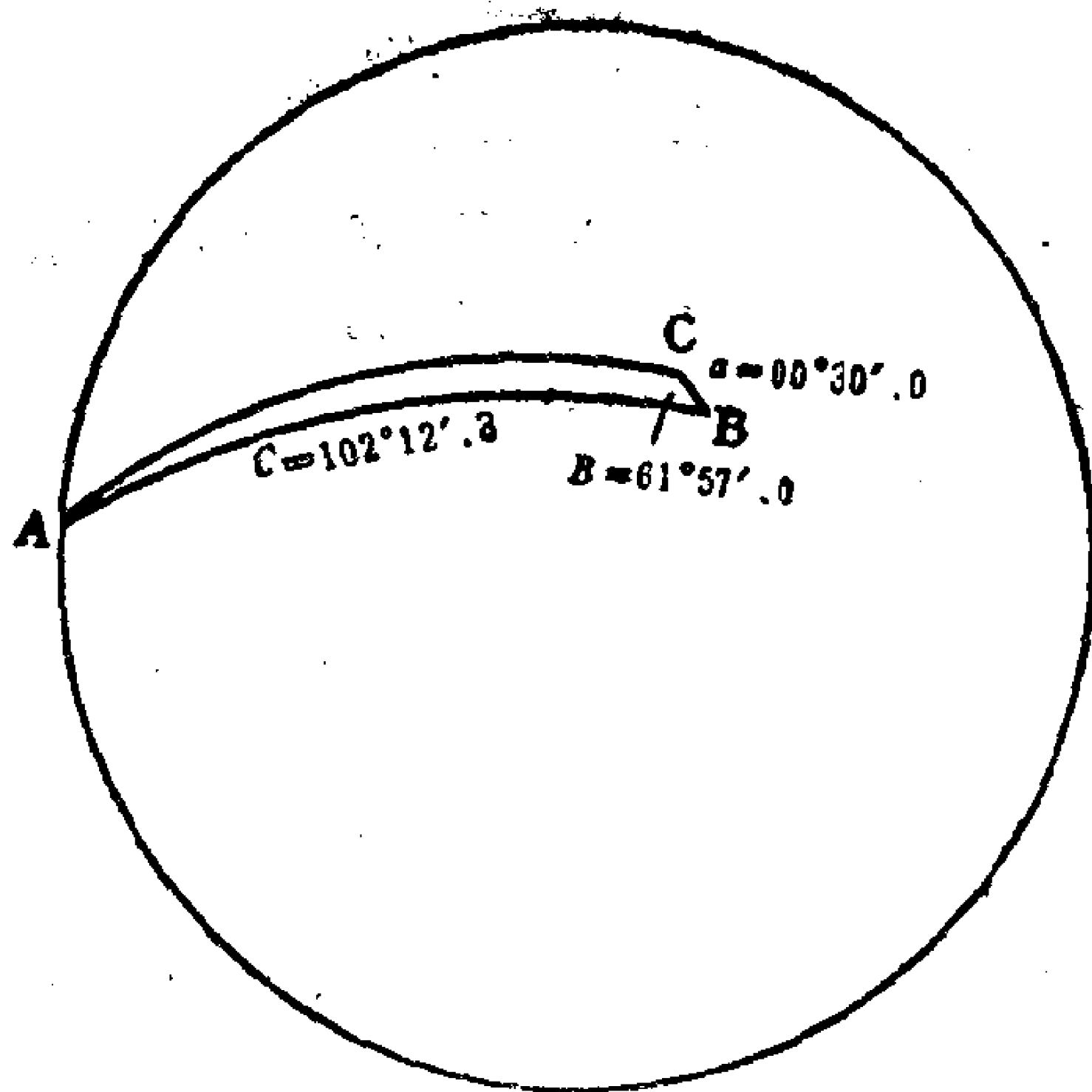
上面已有

$$\sin(C+B) = \sin A \cdot \cos c + 2 \sin C \cdot \cos B \cdot \sin^2 \frac{a}{2}$$

$$\text{即} \quad \sin(C_{\pi}-B) = \sin A \cdot \cos c + 2 \sin C \cdot \cos B \cdot \sin^2 \frac{a}{2}$$

则它的近似式可以写成

$$(C_{\pi}-B) = A \cdot \cos c + \frac{a^2}{2} \cdot \sin C \cdot \cos B$$



(例題 22 附圖)

由公式(22a) $(c-b)_1 = a \cdot \cos B$

所以公式(22b)可以写成

$$(c-b)_2 = a \cdot \cos B - \frac{a^2}{2} \cdot \sin^2 B \cdot \text{ctg } c$$

但公式中的 a 是以弧度, 弧分, 弧秒为單位, 將它化变为度、分、秒單位后, 公式应写成

$$\frac{1}{3437.7} \cdot (c-b)_2' = \frac{a'}{3437.7} \cos B - \frac{1}{2} \left(\frac{a'}{3437.7} \right)^2 \sin^2 B \cdot \text{ctg } c$$

或 $(c-b)_2' = a' \cdot \cos B - \frac{1}{2} \cdot \frac{(a')^2}{3437.7} \sin^2 B \cdot \text{ctg } c$

$$a = 00^\circ 30'.0 \quad \log 1.47712 \quad a = 00^\circ 30'.0 \quad 2\log 2.95424$$

$$B = 61^\circ 57'.0 \quad \underline{L \cos 9.67232} \quad B = 61^\circ 57'.0 \quad 2L \sin 9.89146$$

$$(c-b)_1 = 00^\circ 14'.1 \quad \log 1.14944 \quad c = 102^\circ 12'.3 \quad L \text{ctg } 9.33505 \text{ n}$$

$$\frac{1}{6875.4} \quad \underline{\log 4.16270}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{(a')^2}{3437.7} \sin^2 B \cdot \text{ctg } c = -00^\circ 0'.02 \quad \log 2.34345 \text{ n}$$

$$\therefore (c-b)_2' = 00^\circ 14'.1 - (-00^\circ 00'.02)$$

$$=00^{\circ}14'07''.2$$

$$b=c-(c-b)$$

$$=102^{\circ}12'18''.0-00^{\circ}14'07''.2$$

$$=101^{\circ}58'10''.8$$

又由公式(24a)有

$$A_1 = \frac{a \cdot \sin B}{\sin c}$$

所以公式(24b)可以写成

$$A = \frac{a \cdot \sin B}{\sin c} + \frac{a^2}{2} \cdot \sin 2B \cdot \operatorname{ctg} c \cdot \operatorname{csc} c$$

$$\text{取} \quad A' = \frac{a' \cdot \sin B}{\sin c} + \frac{(a')^2}{6875.4} \cdot \sin 2B \cdot \operatorname{ctg} c \cdot \operatorname{csc} c$$

$$a=00^{\circ}30'.0 \quad \log 1.47712 \quad a=00^{\circ}30'.0 \quad 2\log 2.95424$$

$$B=61^{\circ}57'.0 \quad L \sin 9.94573 \quad 2B=123^{\circ}54'.0 \quad L \sin 9.91909$$

$$c=102^{\circ}12'.3 \quad L \operatorname{csc} 0.00992 \quad c=102^{\circ}12'.3 \quad L \operatorname{ctg} 9.33505 n$$

$$A'_1=00^{\circ}27'.1 \quad \log 1.43277 \quad c=102^{\circ}12'.3 \quad L \operatorname{csc} 0.00992$$

$$\frac{1}{6875.4} \quad \log 4.16270$$

$$\frac{(a')^2}{6875.4} \cdot \sin 2B \cdot \operatorname{ctg} c \cdot \operatorname{csc} c = -00^{\circ}00'.024 \quad \log 2.38200 n$$

$$\therefore A = 00^{\circ}27'.1 + (-00^{\circ}00'.024)$$

$$=00^{\circ}27'.076$$

$$=00^{\circ}27'04''.6$$

§7. 球面三角形解法

7.1 解球面三角形的一般步骤

据球面三角形已知的要素求解其余要素的方法，叫作球面三角形解法。解球面三角形的必要条件是，必须在六个要素中，知其三个要素的值，然后应用前此所导出的公式，求其余要素的值。

球面三角形解法可以分为六种类型，即

1) 已知三边，求其余三角；

2) 已知三角，求其余三边；

- 3) 已知二边及其夾角, 求其余二角及一边;
- 4) 已知二角及其夾边, 求其余二边及一角;
- 5) 已知二边及其一边的对角, 求其余二角及一边;
- 6) 已知二角及其一角的对边, 求其余二边及一角。

不論是那一种类型, 演解的步驟都是一样的, 即

1) 根据所給的条件, 画出該三角形的圖形, 經驗証明, 圖形愈精确, 对于驗对演算結果所起的作用也愈大。

2) 根据已知的条件, 選擇解該三角形应用的公式。尽量选用正切或余切函数的对数式公式。因为对数式公式演算較为簡便, 而正切或余切函数則可給出較精确的解。

3) 按公式的要求, 列出演算格式, 进行演算。整齐的行列和清晰的字体, 是防止演算發生錯誤最有效的方法。

7.2 已知三边的球面三角形解法

設已知球面三角形的三个边 $a b c$, (若其中有一边为 90° , 則該三角形为球面直边三角形, 它的解法已見于例題 20—21), 解該三角形的方法有:

1) 用球面半角正切公式(10)求 ABC 各角的值, 即

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin p_b \cdot \sin p_c}{\sin p \cdot \sin p_a}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin p_a \cdot \sin p_c}{\sin p \cdot \sin p_b}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin p_a \cdot \sin p_b}{\sin p \cdot \sin p_c}}$$

2) 用球面半正矢公式(7)求 ABC 各角的值, 即

$$\operatorname{Hav} A = \csc b \cdot \csc c \cdot \sqrt{\operatorname{Hav}(a+b-c) \cdot \operatorname{Hav}(a-b-c)}$$

$$\operatorname{Hav} B = \csc a \cdot \csc c \cdot \sqrt{\operatorname{Hav}(b+a-c) \cdot \operatorname{Hav}(b-a-c)}$$

$$\operatorname{Hav} C = \csc a \cdot \csc b \cdot \sqrt{\operatorname{Hav}(c+a-b) \cdot \operatorname{Hav}(c-a-b)}$$

3) 用球面余弦公式(3a)求 ABC 各角的值, 即

$$\cos A = (\cos a - \cos b \cdot \cos c) \cdot \csc b \cdot \csc c$$

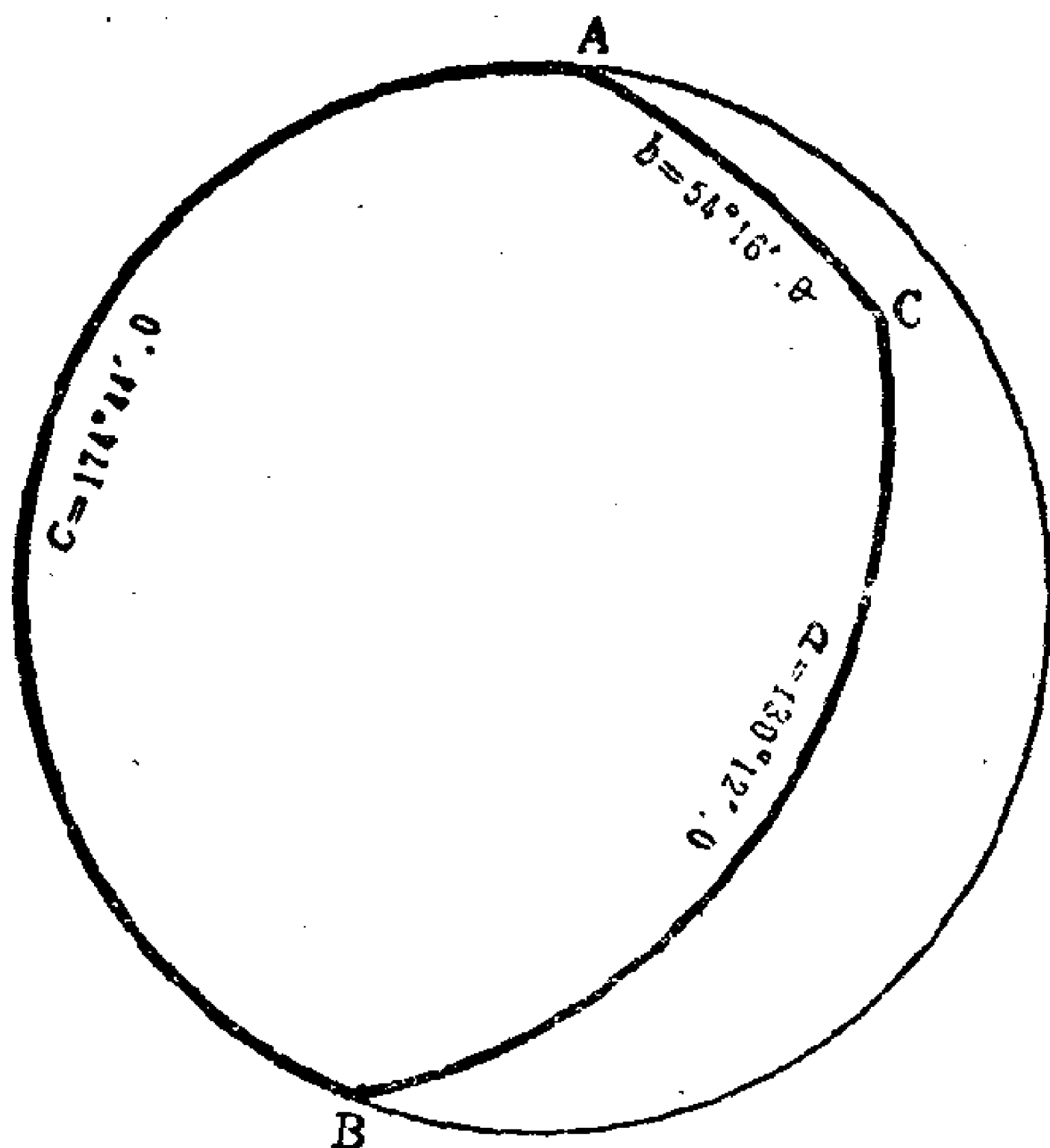
$$\cos B = (\cos b - \cos a \cdot \cos c) \cdot \csc a \cdot \csc c$$

$$\cos C = (\cos c - \cos a \cdot \cos b) \cdot \csc a \cdot \csc b$$

如前所述，三種方法的比較，以採用球面半角正切公式所得的結果較為精確，且查表手續亦較簡易。

例題 23. 設球面三角形 ABC ， $a=130^{\circ}12'$ ， $b=54^{\circ}16'$ ， $c=174^{\circ}44'$ ，解該球面三角形。

解 根據所給的條件，用正射投影作圖法畫出該球面三角形，從圖中可以估



(例題 23 附圖)

計出所求各角的值，均應大於 90° ，而 C 角且接近於 180° ，這和下面演算的結果是符合的。現在採用球面半角正切公式(10)進行演算：

$$a=130^{\circ}12' \quad b=54^{\circ}16' \quad c=174^{\circ}44'$$

$$2p=359^{\circ}12'$$

$$p=179^{\circ}36'$$

$$p_a=49^{\circ}24'$$

$$p_b=125^{\circ}20'$$

$$p_c=4^{\circ}52'$$

$$L \csc 2.15607$$

$$L \csc 0.11960$$

$$L \sin 9.91158$$

$$L \sin 8.92859$$

$$L \csc 2.15607$$

$$L \sin 9.88040$$

$$L \csc 0.08842$$

$$L \sin 8.92859$$

$$L \csc 2.15607$$

$$L \sin 9.88040$$

$$L \sin 9.91158$$

$$L \csc 1.07141$$

$$\begin{aligned}
2L \operatorname{tg} 1.11584 & \quad 2L \operatorname{tg} 1.05348 & 2L \operatorname{tg} 3.01946 \\
L \operatorname{tg} 0.55792 & \quad L \operatorname{tg} 0.52674 & L \operatorname{tg} 1.50973 \\
\frac{A}{2} = 74^\circ 31' 51''.6 & \quad \frac{B}{2} = 73^\circ 26' 25''.2 & \quad \frac{C}{2} = 38^\circ 13' 44''.1 \\
A = 149^\circ 03' 43''.2 & \quad B = 146^\circ 52' 50''.4 & \quad C = 176^\circ 27' 28''.2
\end{aligned}$$

本題採用球面半正矢公式的演算方法如下：

$$\begin{aligned}
a = 130^\circ 12' & \quad L \operatorname{csc} 0.11702 & L \operatorname{csc} 0.11702 \\
b = 54^\circ 16' & \quad L \operatorname{csc} 0.09058 & L \operatorname{csc} 0.09058 \\
c = 174^\circ 44' & \quad L \operatorname{csc} 1.03720 & L \operatorname{csc} 1.03720 \\
a + b + c = 359^\circ 12' & & \\
b + c - a = 98^\circ 48' & \quad \frac{1}{2} L \operatorname{Hav} 4.83040 & \quad \frac{1}{2} L \operatorname{Hav} 4.83040 \\
a - b + c = 250^\circ 40' & \quad \frac{1}{2} L \operatorname{Hav} 4.91158 & \quad \frac{1}{2} L \operatorname{Hav} 4.91158 \\
a + b - c = 9^\circ 44' & \quad \frac{1}{2} L \operatorname{Hav} 3.92859 & \quad \frac{1}{2} L \operatorname{Hav} 3.92859 \\
L \operatorname{Hav} 9.96795 & \quad L \operatorname{Hav} 9.96321 & \quad L \operatorname{Hav} 9.99358 \\
A = 149^\circ 03' 40'' & \quad B = 146^\circ 53' 00'' & \quad 176^\circ 25' < C < 176^\circ 27'
\end{aligned}$$

比較了上述兩種演算方法，可以明顯地看出用正切函數求得的值是精確得多了。

7.3 已知三角的球面三角形解法

設已知球面三角形的三個角 $A B C$ ，(若其中有一角為 90° ，則該三角形為球面直角三角法，它的解法已見例題17-19)，解該三角形的方法有：

1) 用球面半邊正切公式 (16) 求 $a b c$ 各邊的值，即

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} \frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{\sin \frac{E}{2} \cdot \sin \left(A - \frac{E}{2} \right)}{\sin \left(B - \frac{E}{2} \right) \cdot \sin \left(C - \frac{E}{2} \right)}} \\
\operatorname{tg} \frac{b}{2} &= \sqrt{\frac{\sin \frac{E}{2} \cdot \sin \left(B - \frac{E}{2} \right)}{\sin \left(A - \frac{E}{2} \right) \cdot \sin \left(C - \frac{E}{2} \right)}} \\
\operatorname{tg} \frac{c}{2} &= \sqrt{\frac{\sin \frac{E}{2} \cdot \sin \left(C - \frac{E}{2} \right)}{\sin \left(A - \frac{E}{2} \right) \cdot \sin \left(B - \frac{E}{2} \right)}}
\end{aligned}$$

2) 用球面半边正切公式 (13) 求 $a b c$ 各边的值, 即

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos P \cdot \cos P_A}{\cos P_B \cdot \cos P_C}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{-\cos P \cdot \cos P_B}{\cos P_A \cdot \cos P_C}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{c}{2} = \sqrt{\frac{-\cos P \cdot \cos P_C}{\cos P_A \cdot \cos P_B}}$$

3) 用球面余弦公式求 $a b c$ 各边的值, 即

$$\cos a = (\cos A + \cos B \cdot \cos C) \cdot \csc B \cdot \csc C$$

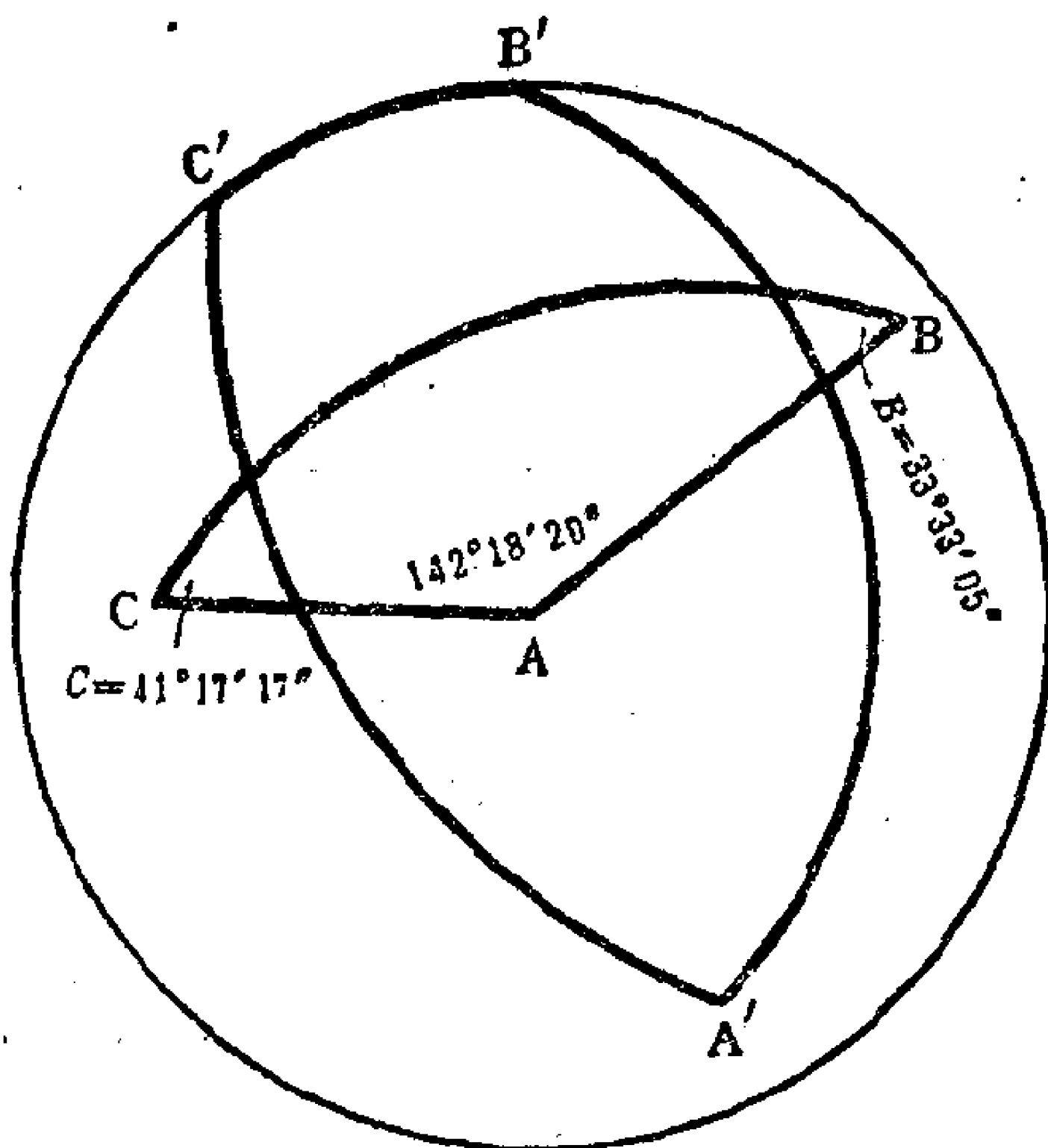
$$\cos b = (\cos B + \cos A \cdot \cos C) \cdot \csc A \cdot \csc C$$

$$\cos c = (\cos C + \cos A \cdot \cos B) \cdot \csc A \cdot \csc B$$

上面三种演算方法的比较, 以采用球面半边正切公式 (16) 所得的结果较为精确, 手续亦较简易。

例題 24. 設球面三角形 ABC , $A=142^{\circ}18'20''$, $B=33^{\circ}33'05''$, $C=41^{\circ}17'17''$, 解該球面三角形。

解 根据所給条件, 用正射投影作圖法画出該球面三角形:



(例題 24 附圖)

从圖中可以估計出 b, c 二边皆小于 90° , 而 a 边則大于 90° 。現在采用球面半
边正切公式(16)进行演算:

$$A=142^\circ 18' 20'' \quad B=33^\circ 33' 05'' \quad C=41^\circ 17' 17'' \quad E=37^\circ 08' 42''$$

$$\frac{E}{2}=18^\circ 34' 21'' \quad L \sin 9.50311 \quad L \sin 9.50311 \quad L \sin 9.50311$$

$$A - \frac{E}{2} = 123^\circ 43' 59'' \quad L \sin 9.91993 \quad L \csc 0.08007 \quad L \csc 0.08007$$

$$B - \frac{E}{2} = 14^\circ 58' 44'' \quad L \csc 0.58760 \quad L \sin 9.41240 \quad L \csc 0.58760$$

$$C - \frac{E}{2} = 22^\circ 42' 56'' \quad L \csc 0.41324 \quad L \csc 0.41324 \quad L \sin 9.58676$$

$$2L \operatorname{tg} 20.42388 \quad 2L \operatorname{tg} 19.40882 \quad 2L \operatorname{tg} 19.75754$$

$$L \operatorname{tg} 10.21194 \quad L \operatorname{tg} 9.70441 \quad L \operatorname{tg} 9.87877$$

$$\frac{a}{2} = 58^\circ 27' 24'' \quad \frac{b}{2} = 26^\circ 51' 12'' \quad \frac{c}{2} = 37^\circ 06' 18''$$

$$a = 116^\circ 54' 48'' \quad b = 53^\circ 42' 24'' \quad c = 74^\circ 12' 36''$$

7.4 已知二边及其夾角的球面三角形解法

設已知球面三角形的二边 a, b 及其夾角 C , (若其中有一边或一角为 90° , 則該三角形为球面直边或直角三角形, 它的解法見例題 17-21), 解該球面三角形的方法有

1) 用訥比尔相似方程式(18)求 A, B 及 c 的值, 即

$$\operatorname{tg} \frac{A+B}{2} = \cos \frac{a-b}{2} \cdot \sec \frac{a+b}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{C}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \sin \frac{a-b}{2} \cdot \csc \frac{a+b}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{C}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \operatorname{tg} \frac{a-b}{2} \cdot \sin \frac{A+B}{2} \cdot \csc \frac{A-B}{2}$$

2) 用球面正弦、余弦公式、及五联关系式所導出的計算式求 B 及 c 的值, 并用球面正弦公式求 A 的值, 即

$$\operatorname{tg} M = \operatorname{tg} b \cdot \cos C$$

$$\operatorname{tg} B = \operatorname{tg} C \cdot \sin M \cdot \csc (a-M)$$

$$\operatorname{tg} c = \operatorname{tg} (a-M) \cdot \sec B$$

$$\sin A = \sin B \cdot \sin a \cdot \csc b$$

3) 用球面半正矢公式(5)或球面半正矢补角公式(6)求 c 的值, 用球面半正矢公式(7)或球面正弦公式(1)求 A 及 B 的值, 即

$$\text{Hav } c = \text{Hav } (a-b) + \sin a \cdot \sin b \cdot \text{Hav } C$$

或 $\text{Shav } c = \text{Shav } (a-b) \cdot \text{Shav } C + \text{Shav } (a+b) \cdot \text{Shav } (180^\circ - C)$

$$\text{Hav } A = \csc b \cdot \csc c \sqrt{\text{Hav } (a+b-c) \cdot \text{Hav } (a-b-c)}$$

$$\text{Hav } B = \csc a \cdot \csc c \sqrt{\text{Hav } (b+a-c) \cdot \text{Hav } (b-a-c)}$$

或 $\sin A = \sin C \cdot \sin a \cdot \csc c$

$$\sin B = \sin C \cdot \sin b \cdot \csc c$$

以上三种解法的比较, 从航海的实用观点考虑, 由于要求的仅为夹角所对的边及该二已知边的一边的对角, 所以常可采用第二种方法, 这种方法在球面天文学中, 解天文三角形时亦是常用的。至第三种方法, 虽然曾广泛为航海界所采用, 但它的缺点在于半正矢函数的角度接近于 0° 时, 函数值的变化甚慢, 而角度接近于 180° 时, 其对数值的变化亦甚慢, 因此在这样范围所求得的值, 误差很大。球面正弦公式求值, 演算虽很简单容易, 但当角度接近于 90° 时, 其对数值变化甚慢, 所求得的值不能精确; 并且正弦函数的缺点还在于所给的是两个相互成为补角的值, 当角度接近于 90° 时, 很难判断那一个值是适合问题的解。

例题 25. 设球面三角形 ABC , $a=86^\circ 53.'0$, $b=63^\circ 25.'2$, $C=105^\circ 18.'4$, 解该球面三角形。

解 根据所给的条件, 用正射投影作图法画出该球面三角形。

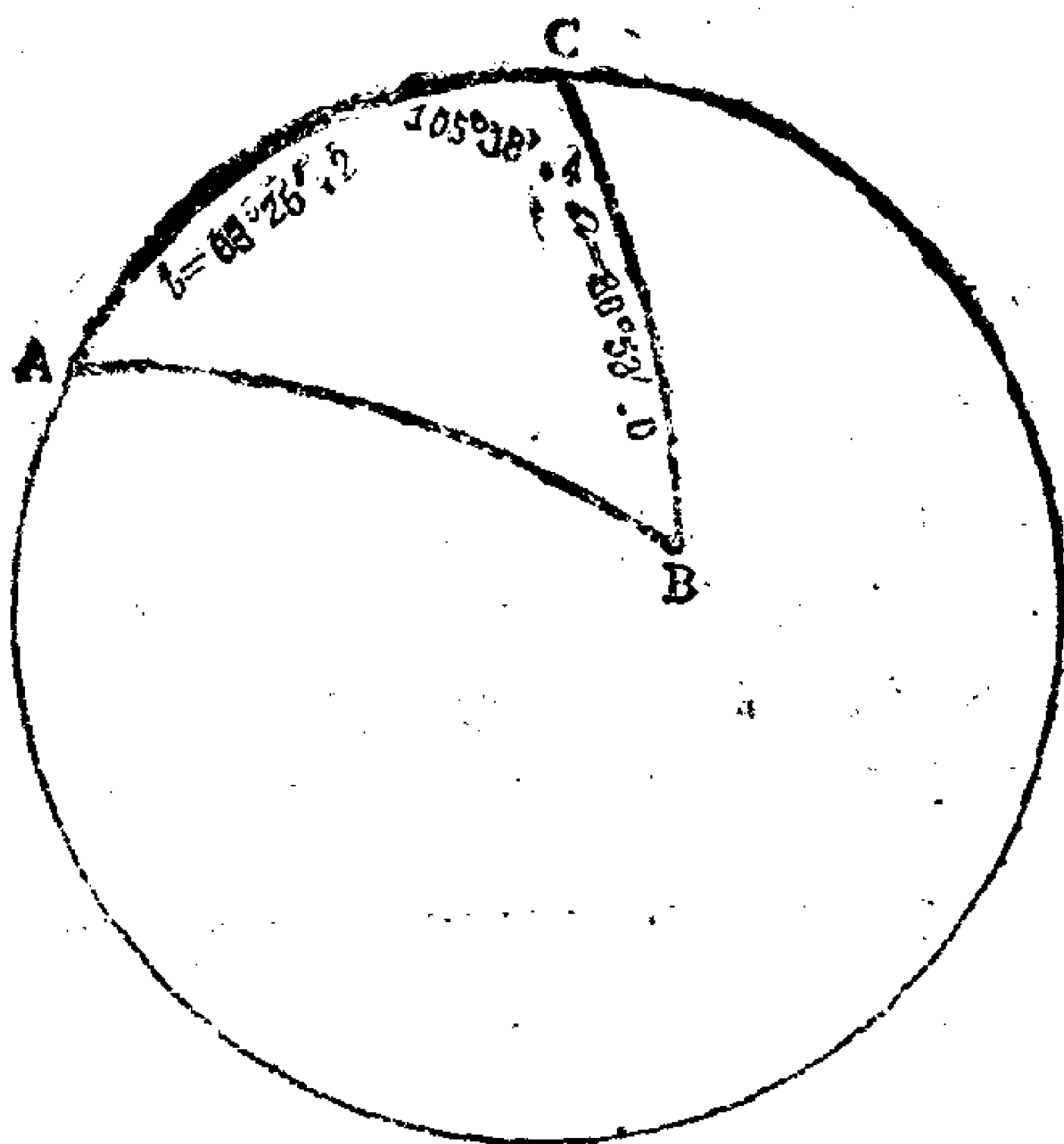
从图中可以估计出 B 小于 90° , 而 A 接近于 90° , c 边则大于 90° 。现在用纳比尔相似方程式(18)进行演算:

$$a=86^\circ 53.'0 \quad \frac{a}{2}=43^\circ 26'36''$$

$$b=63^\circ 25.'2 \quad \frac{b}{2}=31^\circ 42'36''$$

$$\frac{1}{2}(a-b)=11^\circ 43'54'' \quad L \cos 9.99083 \quad L \sin 9.30820 \quad L \tan 9.31737$$

$$\frac{1}{2}(a+b)=75^\circ 09'06'' \quad L \sec 0.59132 \quad L \csc 0.01475$$



(例題 25 附圖)

$$\begin{array}{llll}
 C=105^{\circ}18'.4 & \frac{C}{2}=52^{\circ}39'12'' & \underline{L \operatorname{ctg} 9.88257} & \underline{L \operatorname{ctg} 9.88257} \\
 A=80^{\circ}11'16''-\frac{1}{2}(A+B)=71^{\circ}04'07'' & L \operatorname{tg} 0.46472 & & L \sin 9.97585 \\
 B=61^{\circ}56'58''-\frac{1}{2}(A-B)=9^{\circ}07'09'' & L \operatorname{tg} 9.20552 & & \underline{L \operatorname{csc} 0.80000} \\
 c=102^{\circ}12'18'' & \frac{c}{2}=51^{\circ}06'09'' & & L \operatorname{tg} 0.09322
 \end{array}$$

本題如用第二種方法計算，所得結果，雖然相同，但判定 A 角的值，尤其當 A 角接近於 90° 的情況下，甚感困難而且不準確。下面的演算可以証實這樣的結論。

$$\begin{array}{llll}
 b=63^{\circ}25'12'' & L \operatorname{tg} 0.30074 & & L \operatorname{csc} 0.04851 \\
 C=105^{\circ}18'24'' & L \cos 9.42158n & L \operatorname{tg} 0.56273n & \\
 M=152^{\circ}10'58'' & L \operatorname{tg} 9.72232n & L \sin 9.66900 & \\
 a=86^{\circ}53'00'' & & & L \sin 9.99936 \\
 M=-65^{\circ}17'58'' & L \operatorname{csc} 0.04167n & L \operatorname{tg} 0.33728n & \\
 B=61^{\circ}56'58'' & L \operatorname{tg} 0.27340 & \underline{L \operatorname{sec} 0.32767} & \underline{L \sin 9.94573} \\
 C=120^{\circ}12'18'' & & L \operatorname{tg} 0.66495n & \\
 \underline{80^{\circ}11'13'' < A < 80^{\circ}11'30''} & & & L \sin 9.99360 \\
 \underline{99^{\circ}48'47'' > A > 99^{\circ}48'30''} & & &
 \end{array}$$

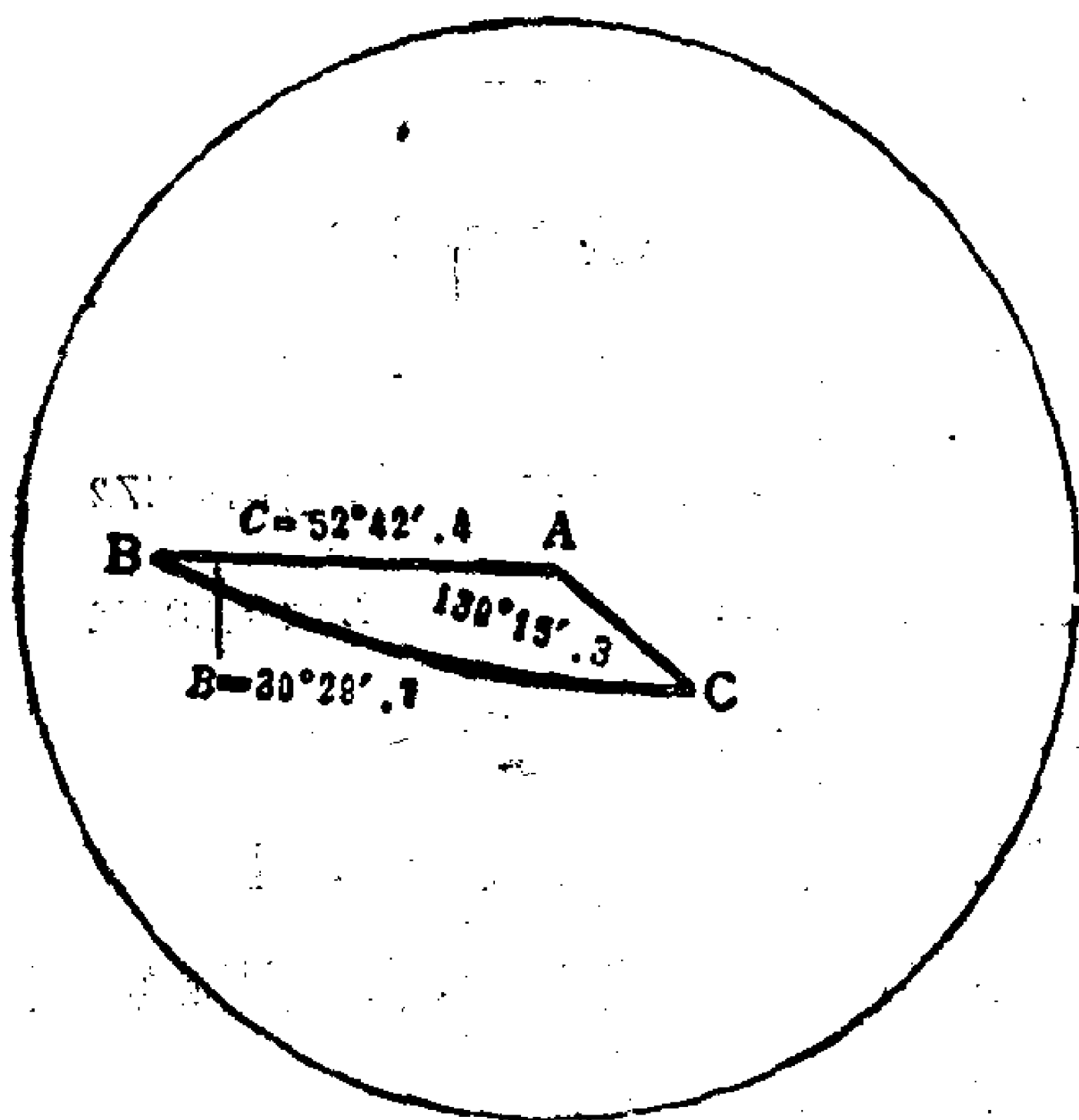
由球面三角形的性質判斷， $a > b$ ，所以 $A > B$ ；但所得 A 的四个值都大于 B ，而巳知二边及其夾角的球面三角形却只能有一个解，因此必須通过其他方法計算，来确定 A 角的值。

7.5 已知二角及其夾边的球面三角形解法

設巳知球面三角形的二角 A 、 B 及其夾边 c ，（若其中的一角或一边为 90° ，則該三角形为球面直角或直边三角形，其解法巳見例題 17-21），解該球面三角形的方法，与解巳知二边及其夾角的球面三角形的方法相似，以用納比尔相似方程式演算，最为有利。

例題 26. 設球面三角形 ABC ， $A=130^\circ 15' .3$ ， $B=30^\circ 29' .7$ ， $C=52^\circ 42' .4$ ，解該球面三角形。

解 根据所給条件，用正射投影作圖法画出該球面三角形圖形。



（例題 26 附圖）

从圖中可以估計出 $C < 90^\circ$ ， $b < 90^\circ$ ， a 接近于 90° 。演算的公式用納比尔相似方程式(18)，即

$$\operatorname{tg} \frac{a+b}{2} = \cos \frac{A-B}{2} \cdot \sec \frac{A+B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{c}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{a-b}{2} = \sin \frac{A-B}{2} \cdot \csc \frac{A+B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{c}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \operatorname{ctg} \frac{A-B}{2} \cdot \csc \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$$

$$A=130^{\circ}15'.3 \quad \frac{A}{2}=65^{\circ}07'39''$$

$$B=30^{\circ}29'.7 \quad \frac{B}{2}=15^{\circ}14'51''$$

$$\frac{1}{2}(A-B)=49^{\circ}52'48'' \quad L\cos 9.80915 \quad L\sin 9.88349 \quad L\operatorname{ctg} 9.92566$$

$$\frac{1}{2}(A+B)=80^{\circ}22'30'' \quad L\sec 0.77677 \quad L\csc 0.00516$$

$$C=52^{\circ}42'.4 \quad \frac{C}{2}=26^{\circ}21'12'' \quad L\operatorname{tg} 9.69494 \quad L\operatorname{tg} 9.69494$$

$$a=83^{\circ}22'27'' \quad \frac{1}{2}(a+b)=62^{\circ}21'21'' \quad L\operatorname{tg} 0.28086 \quad L\csc 0.05264$$

$$b=41^{\circ}20'15'' \quad \frac{1}{2}(a-b)=21^{\circ}01'06'' \quad L\operatorname{tg} 9.58459 \quad L\sin 9.55469$$

$$C=37^{\circ}40'40'' \quad \frac{C}{2}=18^{\circ}50'20'' \quad L\operatorname{tg} 9.53299$$

7.6 已知二边及其一边对角的球面三角形解法

設已知球面三角形的二边 a, b 及其一边 a 的对角 A , (若其中的一边或一角为 90° , 則該三角形为球面直边或直角三角形, 它的解法已見例題 17—21), 解該球面三角形的方法有

1) 用球面正弦公式(1)求 B 的值, 用納比尔相似方程式(18)求 C 及 c 的值, 即

$$\sin B = \csc a \cdot \sin b \cdot \sin A$$

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \sin \frac{a-b}{2} \cdot \csc \frac{a+b}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{A-B}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{c}{2} = \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{A+B}{2} \cdot \sec \frac{A-B}{2}$$

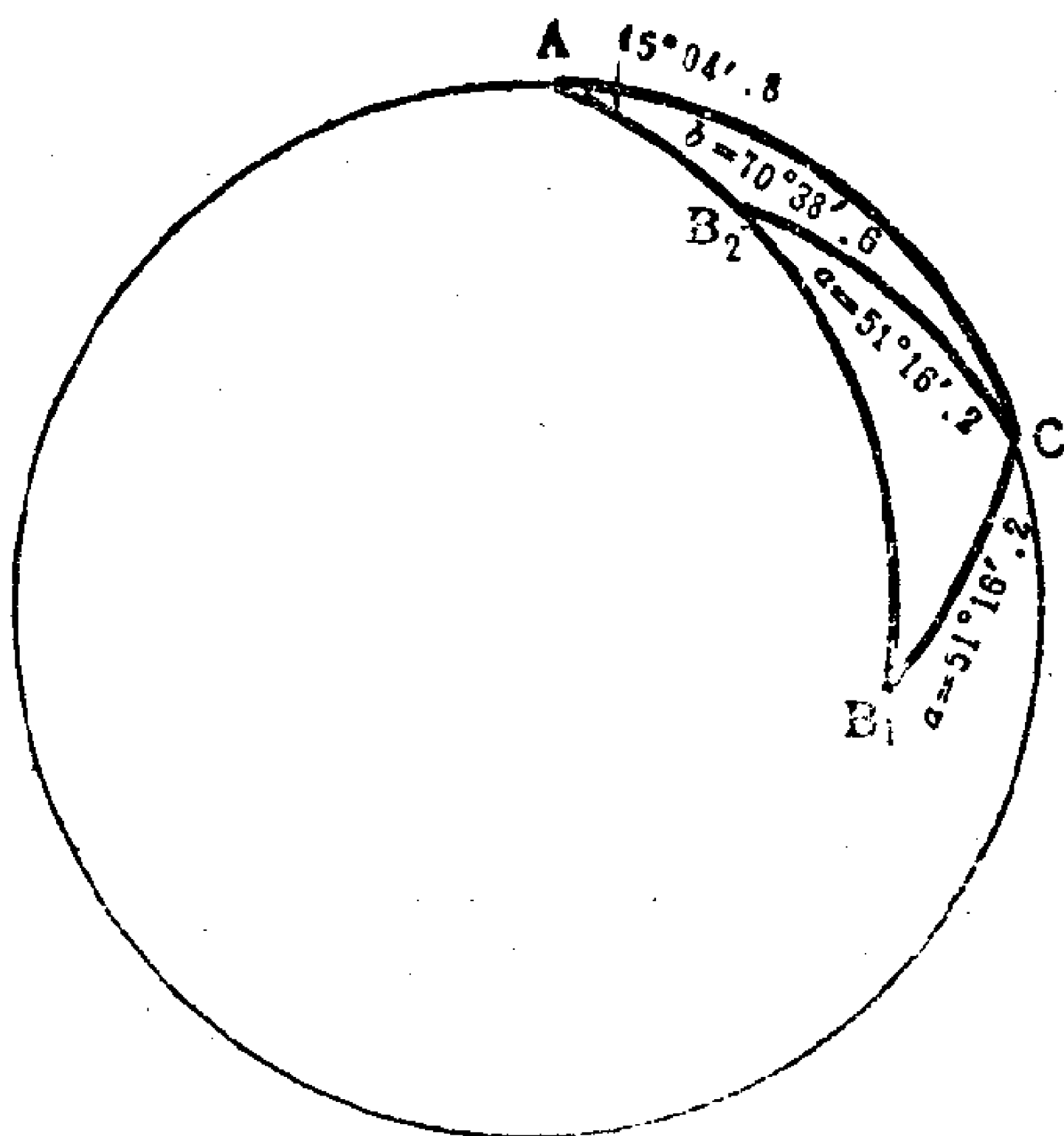
例題 27. 設球面三角形 ABC , $a=51^{\circ}16'.2$, $b=70^{\circ}38'.6$, $A=45^{\circ}04'.8$, 解該球面三角形。

解 根据所給条件, 用正射投影作圖法画出該球面三角形。

从圖中可以估計出本題有二解: $B_1 < 90^{\circ}$, C_1 及 c_1 大于 90° , 而 $B_2 > 90^{\circ}$, C_2 及 c_2 小于 90° 。演算的公式为

$$\sin B = \sin b \cdot \csc a \cdot \sin A$$

$$\operatorname{tg} \frac{C_1}{2} = \sin \frac{1}{2}(b-a) \cdot \csc \frac{1}{2}(b+a) \cdot \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(B_1-A)$$



(例題 27 附圖)

$$\operatorname{tg} \frac{C_2}{2} = \sin \frac{1}{2}(b-a) \cdot \csc \frac{1}{2}(b+a) \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}(B_1+A) \textcircled{1}$$

$$\operatorname{tg} \frac{C_1}{2} = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(b-a) \cdot \sin \frac{1}{2}(B_1+A) \cdot \csc \frac{1}{2}(B_1-A)$$

$$\operatorname{tg} \frac{C_2}{2} = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(b-a) \cdot \cos \frac{1}{2}(B_1-A) \cdot \sec \frac{1}{2}(B_1+A) \textcircled{2}$$

① $B_2 = 180^\circ - B_1$, $\frac{1}{2}(B_2 - A) = \frac{1}{2}(180^\circ - B_1 - A) = 90^\circ - \frac{B_1 + A}{2}$, 所以

$$\operatorname{ctg} \frac{1}{2}(B_2 - A) = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(B_1 + A), \quad \csc \frac{1}{2}(B_2 - A) = \sec \frac{1}{2}(B_1 + A).$$

$$\frac{1}{2}(B_2 + A) = \frac{1}{2}(180^\circ - B_1 + A) = 90^\circ - \frac{B_1 - A}{2}, \text{ 所以 } \sin \frac{1}{2}(B_2 + A) =$$

$$\cos \frac{1}{2}(B_1 - A).$$

$$b=70^{\circ}38'.6 \quad L\sin 9.97473$$

$$a=51^{\circ}16'.2 \quad L\csc 0.10785$$

$$A=45^{\circ}04'.8 \quad \underline{L\sin 9.85009}$$

$$B_1=58^{\circ}54'45'' \quad B_2=121^{\circ}05'15'' \quad L\sin 9.93267$$

$$b=70^{\circ}38'.6 \quad \frac{b}{2}=35^{\circ}19'18''$$

$$a=51^{\circ}16'.2 \quad \frac{a}{2}=25^{\circ}38'06''$$

$$\frac{1}{2}(b-a)=9^{\circ}41'12'' \quad L\sin 9.22598 \quad L\sin 9.22958$$

$$L\lg 9.23221 \quad L\lg 9.23221$$

$$\frac{1}{2}(b+a)=60^{\circ}57'24'' \quad L\csc 0.05836 \quad L\csc 0.05836$$

$$B_1=58^{\circ}54'45'' \quad B_2=121^{\circ}05'15'' \quad \frac{B_1}{2}=29^{\circ}27'22''.5$$

$$A=45^{\circ}04'.8 \quad \frac{A}{2}=22^{\circ}32'24''$$

$$\frac{1}{2}(B_1-A)=6^{\circ}54'58''.5 \quad \underline{L\csc 0.91614} \quad L\csc 0.91930 \quad L\cos 9.99683$$

$$\frac{1}{2}(B_1+A)=51^{\circ}59'46''.5 \quad \underline{L\lg 0.10713} \quad \underline{L\sin 9.89651} \quad \underline{L\sec 0.21062}$$

$$C_1=115^{\circ}33'24'' \quad \frac{C_1}{2}=57^{\circ}46'42''.0 \quad L\lg 0.20048$$

$$C_2=34^{\circ}27'18'' \quad \frac{C_2}{2}=17^{\circ}13'39''.0 \quad L\lg 9.49147$$

$$c_1=96^{\circ}19'22'' \quad \frac{c_1}{2}=48^{\circ}09'41''.0 \quad L\lg 0.04802$$

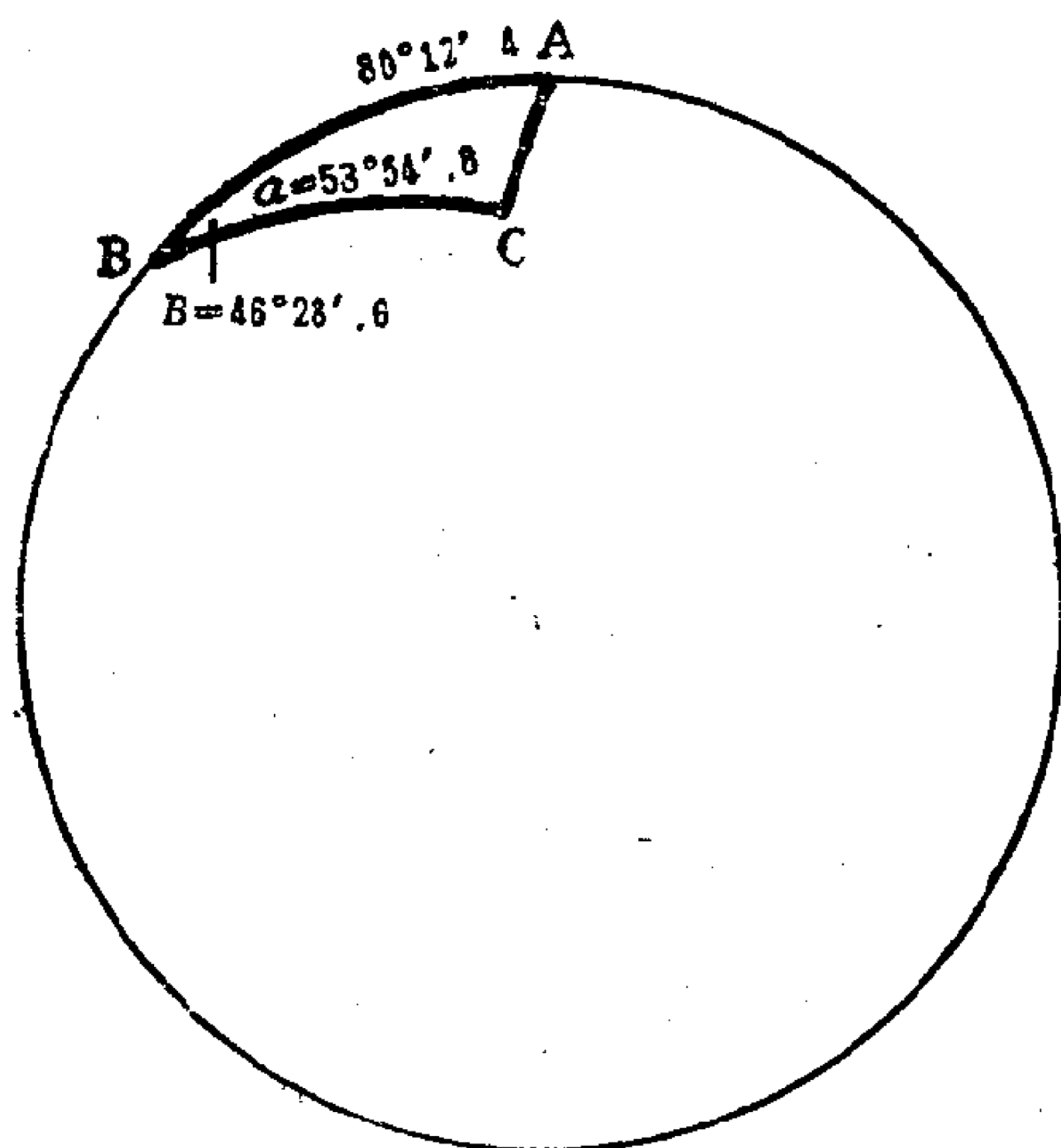
$$c_2=30^{\circ}46'40'' \quad \frac{c_2}{2}=15^{\circ}23'20''.0 \quad L\lg 9.43966$$

7.7 已知二角及其一角对边的球面三角形解法

設已知球面三角形 ABC 的二角 A, B 及其一角 A 的对边 a , (若其中的一角或一边为 90° , 則該三角形为球面直角或直边三角形, 它的解法已見例題 17—21), 解該球面三角形的方法和解已知二边及其一边对角的球面三角形方法相似, 首先用球面正弦公式求出所給二角的另一对边, 然后用納比尔相似方程式求其余的一角及一边的值。

例題 23. 設球面三角形 AEC , $A=80^{\circ}12'.4$, $E=46^{\circ}28'.6$, $a=53^{\circ}54'.8$, 解該球面三角形。

解 根据所給条件，用正射投影作圖法画出該球面三角形。



(例題 28 附圖)

从圖中可以估計出本題只能有一个解，且所求的值均应小于 90° 。演算的公式为：

$$\sin b = \csc A \cdot \sin B \cdot \sin a$$

$$\operatorname{tg} \frac{c}{2} = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(a+b) \cdot \cos \frac{1}{2}(A+B) \cdot \sec \frac{1}{2}(A-B)$$

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \sin \frac{1}{2}(a-b) \cdot \csc \frac{1}{2}(a+b) \cdot \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(A-B)$$

$$A=80^\circ 12'.4 \quad L \csc 0.00637 \quad \frac{A}{2}=40^\circ 46'.2$$

$$B=46^\circ 28'.6 \quad L \sin 9.86039 \quad \frac{B}{2}=23^\circ 14'.3$$

$$\frac{1}{2}(A+B)=63^\circ 20'.5 \quad L \cos 9.65192$$

$$\frac{1}{2}(A-B)=16^\circ 51'.9 \quad L \sec 0.01910 \quad L \operatorname{ctg} 0.51833$$

$$a=53^\circ 54'.6 \quad L \sin 9.90746 \quad \frac{a}{2}=26^\circ 57'.3$$

$$b=36^{\circ}29'.0 \quad L \sin 9.77422 \quad \frac{b}{2}=18^{\circ}14'.5$$

$$\frac{1}{2}(a+b)=45^{\circ}11'.8 \quad \underline{L \operatorname{tg} 0.00298} \quad L \operatorname{csc} 0.14903$$

$$\frac{1}{2}(a-b)=3^{\circ}42'.8 \quad \underline{L \sin 9.18039}$$

$$c=50^{\circ}32'.4 \quad \frac{c}{2}=25^{\circ}16'.2 \quad L \operatorname{tg} 9.67400$$

$$C=70^{\circ}18'.8 \quad \frac{C}{2}=35^{\circ}9'.4 \quad L \operatorname{tg} 9.84775$$

第三章 球面三角微分关系式

§8. 球面三角微分关系式

球面三角形各要素間的相互关系是以球面三角公式来表示，这在第二章中已作了演証和講解。本章是在确定了球面三角形要素的关系之后，进一步研究球面三角形各要素微量变化的相互关系，表示这种微量变化关系的方程式，叫作球面三角微分关系式。

今由球面正弦公式(1)

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B}$$

上式的微分得

$$\frac{\cos a \cdot \sin A \cdot da - \sin a \cdot \cos A \cdot dA}{\sin^2 A} = \frac{\cos b \cdot \sin B \cdot db - \sin b \cdot \cos B \cdot dB}{\sin^2 B}$$

上式的左項乘以 $\frac{\sin A}{\sin a}$ ，右項乘以 $\frac{\sin B}{\sin b}$ ，由于 $\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b}$ ，因此

$$\begin{aligned} & \frac{\cos a \cdot \sin A \cdot da - \sin a \cdot \cos A \cdot dA}{\sin^2 A} \cdot \frac{\sin A}{\sin a} = \\ & = \frac{\cos b \cdot \sin B \cdot db - \sin b \cdot \cos B \cdot dB}{\sin^2 B} \cdot \frac{\sin B}{\sin b} \end{aligned}$$

化簡之，得

$$\operatorname{ctg} a \cdot da - \operatorname{ctg} A \cdot dA = \operatorname{ctg} b \cdot db - \operatorname{ctg} B \cdot dB$$

同理

$$\operatorname{ctg} a \cdot da - \operatorname{ctg} A \cdot dA = \operatorname{ctg} c \cdot dc - \operatorname{ctg} C \cdot dC$$

所以 $\operatorname{ctg} a \cdot da - \operatorname{ctg} A \cdot dA = \operatorname{ctg} b \cdot db - \operatorname{ctg} B \cdot dB =$

$$= \operatorname{ctg} c \cdot dc - \operatorname{ctg} C \cdot dC \quad (27)$$

由球面三角微分关系式(27)，可以看出，球面三角形的边与其所对的角的微分关系是：球面三角形边的微分与該边余切的乘积减去对角的

微分与該角余切的乘积是一个常数。

今由球面余弦公式(3)

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$$

上式的微分, 得

$$\sin a \cdot da = (\sin b \cdot \cos c - \cos b \cdot \sin c \cdot \cos A) db$$

$$+ (\cos b \cdot \sin c - \sin b \cdot \cos c \cdot \cos A) dc + \sin b \cdot \sin c \cdot \sin A \cdot dA$$

但由球面五联关系式(2)有

$$\sin a \cdot \cos B = \cos b \cdot \sin c - \sin b \cdot \cos c \cdot \cos A$$

$$\sin a \cdot \cos C = \cos c \cdot \sin b - \sin c \cdot \cos b \cdot \cos A$$

所以

$$\sin a \cdot da = \sin a \cdot \cos C \cdot db + \sin a \cdot \cos B \cdot dc + \sin b \cdot \sin c \cdot \sin A \cdot dA$$

化简之, 得球面三角形二边及其夹角对第三边的微分关系式

$$\left. \begin{aligned} da &= \cos C \cdot db + \cos B \cdot dc + \sin b \cdot \sin C \cdot dA \\ &\quad (\text{或} + \sin c \cdot \sin B \cdot dA) \\ \text{同理} \quad db &= \cos A \cdot dc + \cos C \cdot da + \sin c \cdot \sin A \cdot dB \\ &\quad (\text{或} + \sin a \cdot \sin C \cdot dB) \\ dc &= \cos B \cdot da + \cos A \cdot db + \sin a \cdot \sin B \cdot dC \\ &\quad (\text{或} + \sin b \cdot \sin A \cdot dC) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

今以極綫三角形的关系代入球面三角微分关系式(28), 則得球面三角形二角及其夹边对第三角的微分关系式:

$$\left. \begin{aligned} dA &= \sin b \cdot \sin C \cdot da - (\cos c \cdot dB + \cos b \cdot dC) \\ \text{或} \quad dA &= \sin c \cdot \sin B \cdot da - (\cos c \cdot dB + \cos b \cdot dC) \\ dB &= \sin c \cdot \sin A \cdot db - (\cos a \cdot dC + \cos c \cdot dA) \\ \text{或} \quad dB &= \sin a \cdot \sin C \cdot db - (\cos a \cdot dC + \cos c \cdot dA) \\ dC &= \sin a \cdot \sin B \cdot dc - (\cos b \cdot dA + \cos a \cdot dB) \\ \text{或} \quad dC &= \sin b \cdot \sin A \cdot dc - (\cos b \cdot dA + \cos a \cdot dB) \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

今由球面四联关系式(4)

$$\operatorname{ctg} a \cdot \sin b = \operatorname{ctg} A \cdot \sin C + \cos b \cdot \cos C$$

上式的微分, 得

$$\operatorname{ctg} a \cdot \cos b \cdot db - \csc^2 a \cdot \sin b \cdot da = -\csc^2 A \cdot \sin C \cdot dA + \operatorname{ctg} A \cdot \cos C \cdot dC -$$

$$-\sin b \cdot \cos C \cdot db - \cos b \cdot \sin C \cdot dC$$

化簡之，得

$$\frac{\sin b}{\sin^2 a} \cdot da = \frac{\cos c}{\sin a} \cdot db + \frac{\cos B}{\sin A} \cdot dC + \frac{\sin C}{\sin^2 A} \cdot dA$$

但

$$\frac{\sin b}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin A}$$

$$\frac{\sin C}{\sin A} = \frac{\sin c}{\sin a}$$

所以
$$\frac{\sin B}{\sin a \cdot \sin A} \cdot da = \frac{\cos c}{\sin a} \cdot db + \frac{\cos B}{\sin A} \cdot dC + \frac{\sin C}{\sin a \cdot \sin A} \cdot dA$$

即球面三角形四联要素的微分关系式

$$\left. \begin{aligned} \sin B \cdot da &= \sin A \cdot \cos c \cdot db + \sin a \cdot \cos B \cdot dC + \sin c \cdot dA \\ \text{同理 } \sin C \cdot da &= \sin A \cdot \cos b \cdot dc + \sin a \cdot \cos C \cdot dB + \sin b \cdot dA \\ \sin C \cdot db &= \sin B \cdot \cos a \cdot dc + \sin b \cdot \cos C \cdot dA + \sin a \cdot dB \\ \sin A \cdot db &= \sin B \cdot \cos c \cdot da + \sin b \cdot \cos A \cdot dC + \sin c \cdot dB \\ \sin A \cdot dc &= \sin C \cdot \cos b \cdot da + \sin c \cdot \cos A \cdot dB + \sin b \cdot dC \\ \sin B \cdot dc &= \sin C \cdot \cos a \cdot db + \sin c \cdot \cos B \cdot dA + \sin a \cdot dC \end{aligned} \right\} (30)$$

从以上四个球面三角微分关系式，可以得出球面三角形任意三个要素的微量变化，对于另外一个任意要素的影响。这对于以后研究球面三角形或天文三角形的误差是很有用的。

第四章 球面角盈及球面 三角形面积

§9. 球面角盈

9.1 球面角盈

球面三角形三个角的和，必小于 540° ，而大于 180° ，其超出 180° 的部份，叫作球面角盈，并用 E 表示之，即

$$E = A + B + C - 180^\circ \quad (31)$$

但球面角盈亦可用边的函数来表示。下面就是几个用边的函数表示球面角盈的公式。

9.2 加諾里(Cagnoli)球面角盈公式

由球面半边公式(14)

$$\sin \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{E}{2} \cdot \sin \left(A - \frac{E}{2} \right)}{\sin B \cdot \sin C}}$$

$$\sin \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{E}{2} \cdot \sin \left(B - \frac{E}{2} \right)}{\sin A \cdot \sin C}}$$

兩式相乘得 $\sin \frac{a}{2} \cdot \sin \frac{b}{2} = \frac{\sin \frac{E}{2}}{\sin C} \cdot \sqrt{\frac{\sin \left(A - \frac{E}{2} \right) \cdot \sin \left(B - \frac{E}{2} \right)}{\sin A \cdot \sin B}}$

但由球面半边公式(15)

$$\cos \frac{c}{2} = \sqrt{\frac{\sin \left(A - \frac{E}{2} \right) \cdot \sin \left(B - \frac{E}{2} \right)}{\sin A \cdot \sin B}}$$

所以

$$\sin \frac{a}{2} \cdot \sin \frac{b}{2} = \frac{\sin \frac{E}{2}}{\sin C} \cdot \cos \frac{c}{2}$$

即

$$\begin{aligned} \sin \frac{E}{2} &= \frac{\sin \frac{a}{2} \cdot \sin \frac{b}{2}}{\cos \frac{c}{2}} \cdot \sin C \\ &= \frac{\sin \frac{a}{2} \cdot \sin \frac{b}{2}}{\cos \frac{c}{2}} \cdot 2 \sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \end{aligned}$$

但由球面半角公式(8)及(9)

$$\sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin P_a \cdot \sin P_b}{\sin a \cdot \sin b}}$$

$$\cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin P \cdot \sin P_c}{\sin a \cdot \sin b}}$$

$$\text{所以 } \sin \frac{E}{2} = \frac{\sin \frac{a}{2} \cdot \sin \frac{b}{2}}{\cos \frac{c}{2}} \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{\sin P_a \cdot \sin P_b}{\sin a \cdot \sin b}} \cdot \sqrt{\frac{\sin P \cdot \sin P_c}{\sin a \cdot \sin b}}$$

化簡之，得加諾里球面角盈公式

$$\sin \frac{E}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\sin P \cdot \sin P_a \cdot \sin P_b \cdot \sin P_c}}{\cos \frac{a}{2} \cdot \cos \frac{b}{2} \cdot \cos \frac{c}{2}} \quad (32)$$

9.3 留里尔(Lhuiller)球面角盈公式

由德朗布尔方程式(17)

$$\frac{\cos \frac{A+B}{2}}{\sin \frac{C}{2}} = \frac{\cos \frac{a+b}{2}}{\cos \frac{c}{2}}$$

故
$$\frac{\cos \frac{A+B}{2} + \sin \frac{C}{2}}{\sin \frac{C}{2}} = \frac{\cos \frac{a+b}{2} + \cos \frac{c}{2}}{\cos \frac{c}{2}} \quad (\text{I})$$

又由公式(17)
$$\frac{\sin \frac{A+B}{2}}{\cos \frac{C}{2}} = \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{c}{2}}$$

故
$$\frac{\sin \frac{A+B}{2} - \cos \frac{C}{2}}{\cos \frac{C}{2}} = \frac{\cos \frac{a-b}{2} - \cos \frac{c}{2}}{\cos \frac{c}{2}} \quad (\text{II})$$

(II) ÷ (I) 得
$$\frac{\sin \frac{A+B}{2} - \cos \frac{C}{2}}{\cos \frac{A+B}{2} + \sin \frac{C}{2}} = \frac{\cos \frac{a-b}{2} - \cos \frac{c}{2}}{\cos \frac{a+b}{2} + \cos \frac{c}{2}} \cdot \frac{\cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{C}{2}}$$

但
$$\frac{\sin \frac{A+B}{2} - \cos \frac{C}{2}}{\cos \frac{A+B}{2} + \sin \frac{C}{2}} = \frac{\sin \frac{1}{4}(A+B+C-180^\circ)}{\cos \frac{1}{4}(A+B+C-180^\circ)}$$

$$\frac{\cos \frac{a-b}{2} - \cos \frac{c}{2}}{\cos \frac{a+b}{2} + \cos \frac{c}{2}} = \frac{\sin \frac{1}{4}(a-b+c) \cdot \sin \frac{1}{4}(b+c-a)}{\cos \frac{1}{4}(a+b+c) \cdot \cos \frac{1}{4}(a+b-c)}$$

$$\frac{\cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{C}{2}} = \sqrt{\frac{\sin P \cdot \sin P_c}{\sin P_a \cdot \sin P_b}}$$

所以
$$\frac{\sin \frac{1}{4}(A+B+C-180^\circ)}{\cos \frac{1}{4}(A+B+C-180^\circ)} =$$

$$= \frac{\sin \frac{1}{4}(a-b+c) \cdot \sin \frac{1}{4}(b+c-a)}{\cos \frac{1}{4}(a+b+c) \cdot \cos \frac{1}{4}(a+b-c)} \cdot \sqrt{\frac{\sin P \cdot \sin P_c}{\sin P_a \cdot \sin P_b}}$$

化简之，得留里尔球面角盈公式

$$\operatorname{tg} \frac{E}{4} = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{P}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{P_a}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{P_b}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{P_c}{2}} \quad (33)$$

9.4 欧勒(Euler)球面角盈公式

由德朗布尔方程式(17)

$$\sin \frac{A+B}{2} = \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{c}{2}} \cdot \cos \frac{C}{2} \quad (\text{I})$$

$$\cos \frac{A+B}{2} = \frac{\cos \frac{a+b}{2}}{\cos \frac{c}{2}} \cdot \sin \frac{C}{2} \quad (\text{II})$$

(I) $\times \cos \frac{C}{2}$ + (II) $\times \sin \frac{C}{2}$ 得

$$\begin{aligned} & \sin \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} + \cos \frac{A+B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} = \\ & = \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{c}{2}} \cdot \cos^2 \frac{C}{2} + \frac{\cos \frac{a+b}{2}}{\cos \frac{c}{2}} \cdot \sin^2 \frac{C}{2} \end{aligned}$$

化简之, 得

$$\sin \frac{1}{2}(A+B+C) = \frac{\cos \frac{a}{2} \cdot \cos \frac{b}{2} + \sin \frac{a}{2} \cdot \sin \frac{b}{2} \cdot \cos C}{\cos \frac{c}{2}}$$

但

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2}(A+B+C) &= \sin \frac{1}{2}(180^\circ + E) \\ &= \cos \frac{E}{2} \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} \sin \frac{a}{2} \cdot \sin \frac{b}{2} \cdot \cos C &= \sin \frac{a}{2} \cdot \sin \frac{b}{2} \cdot \frac{\cos c - \cos a \cdot \cos b}{\sin a \cdot \sin b} \\ &= \frac{\cos c - \left(2 \cos^2 \frac{a}{2} - 1\right) \cdot \left(2 \cos^2 \frac{b}{2} - 1\right)}{4 \cos \frac{a}{2} \cdot \cos \frac{b}{2}} \end{aligned}$$

$$= \frac{\cos c - 4 \cos^2 \frac{a}{2} \cdot \cos^2 \frac{b}{2} + \cos a + \cos b + 1}{4 \cos \frac{a}{2} \cdot \cos \frac{b}{2}}$$

所以

$$\cos \frac{E}{2} = \frac{\cos \frac{a}{2} \cdot \cos \frac{b}{2} + \frac{\cos c - 4 \cos^2 \frac{a}{2} \cdot \cos^2 \frac{b}{2} + \cos a + \cos b + 1}{4 \cos \frac{a}{2} \cdot \cos \frac{b}{2}}}{\cos \frac{c}{2}}$$

化簡之，得欧勒球面角盈公式

$$\cos \frac{E}{2} = \frac{1 + \cos a + \cos b + \cos c}{4 \cos \frac{a}{2} \cdot \cos \frac{b}{2} \cdot \cos \frac{c}{2}} \quad (34)$$

§10. 球面三角形面积

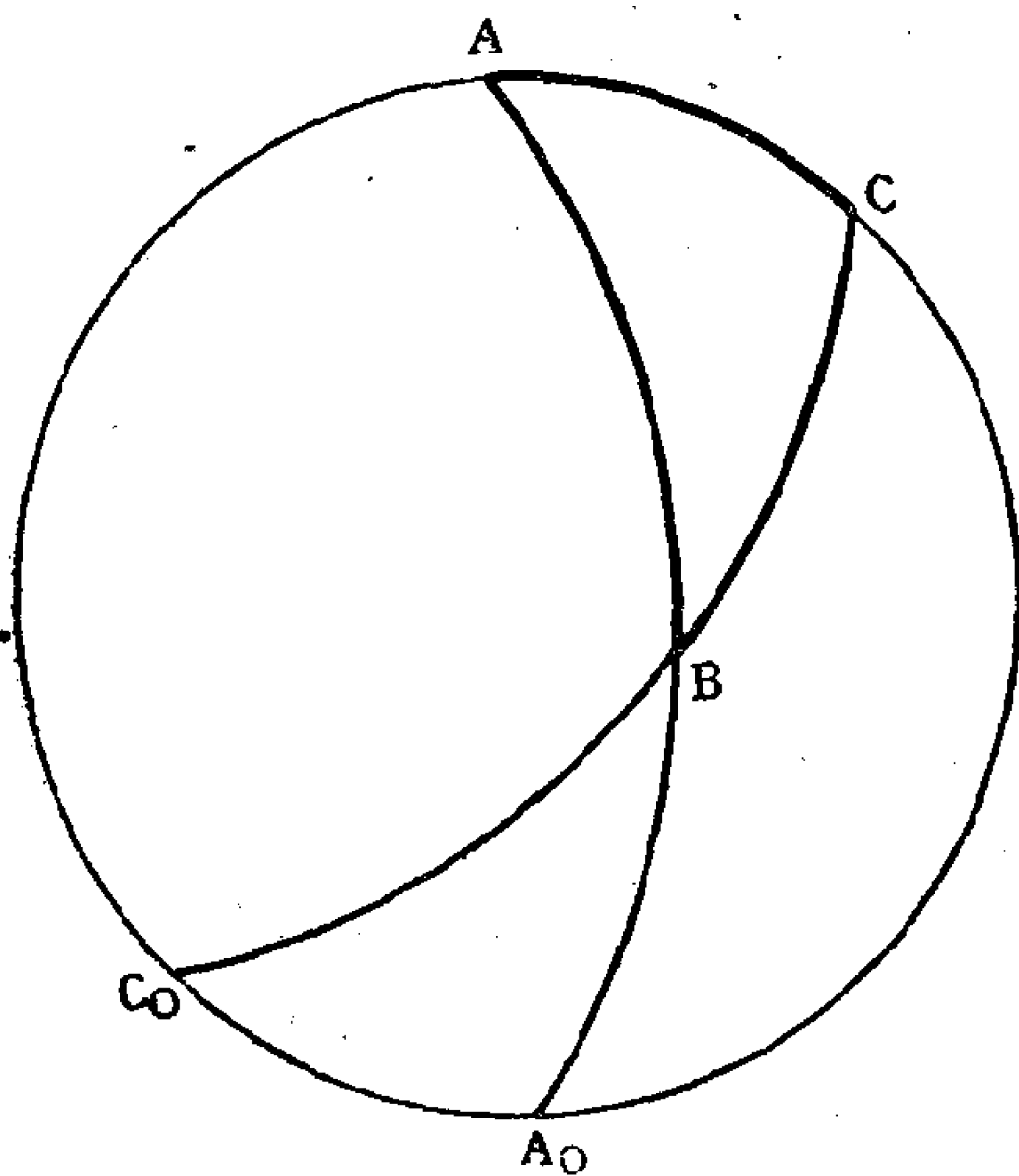


圖 21

由上圖（圖 21）可以看出，球面三角形 ABC 的面积，等于球面二角形 A 的面积減去 A_0BC 的面积；或等于球面二角形 B 的面积減去 AB_0C （即 A_0BC_0 ）的面积；或等于球面二角形 C 的面积減去 ABC_0 的面积。今由球面几何已知球面二角形的面积为 $\frac{\pi R^2}{90^\circ} \cdot \alpha^\circ$ ，其中 R 为球的半径， α° 为球面角。設以 $S_{ABC}, S_{A_0BC}, S_{AB_0C}, S_{ABC_0}$ 表示球面三角形 ABC, A_0BC, AB_0C, ABC_0 的面积，則

$$S_{ABC} = \frac{\pi R^2}{90^\circ} \cdot A^\circ - S_{A_0BC}$$

$$S_{ABC} = \frac{\pi R^2}{90^\circ} \cdot B^\circ - S_{AB_0C} \text{ (即 } S_{A_0BC_0} \text{)}$$

$$S_{ABC} = \frac{\pi R^2}{90^\circ} \cdot C^\circ - S_{ABC_0}$$

三式相和得

$$\begin{aligned} 3S_{ABC} &= \frac{\pi R^2}{90^\circ} \cdot (A + B + C) - (S_{A_0BC} + S_{AB_0C} + S_{ABC_0}) \\ &= \frac{\pi R^2}{90^\circ} \cdot (A + B + C) - (2\pi R^2 - S_{ABC}) \end{aligned}$$

化簡之，得球面三角形面积公式

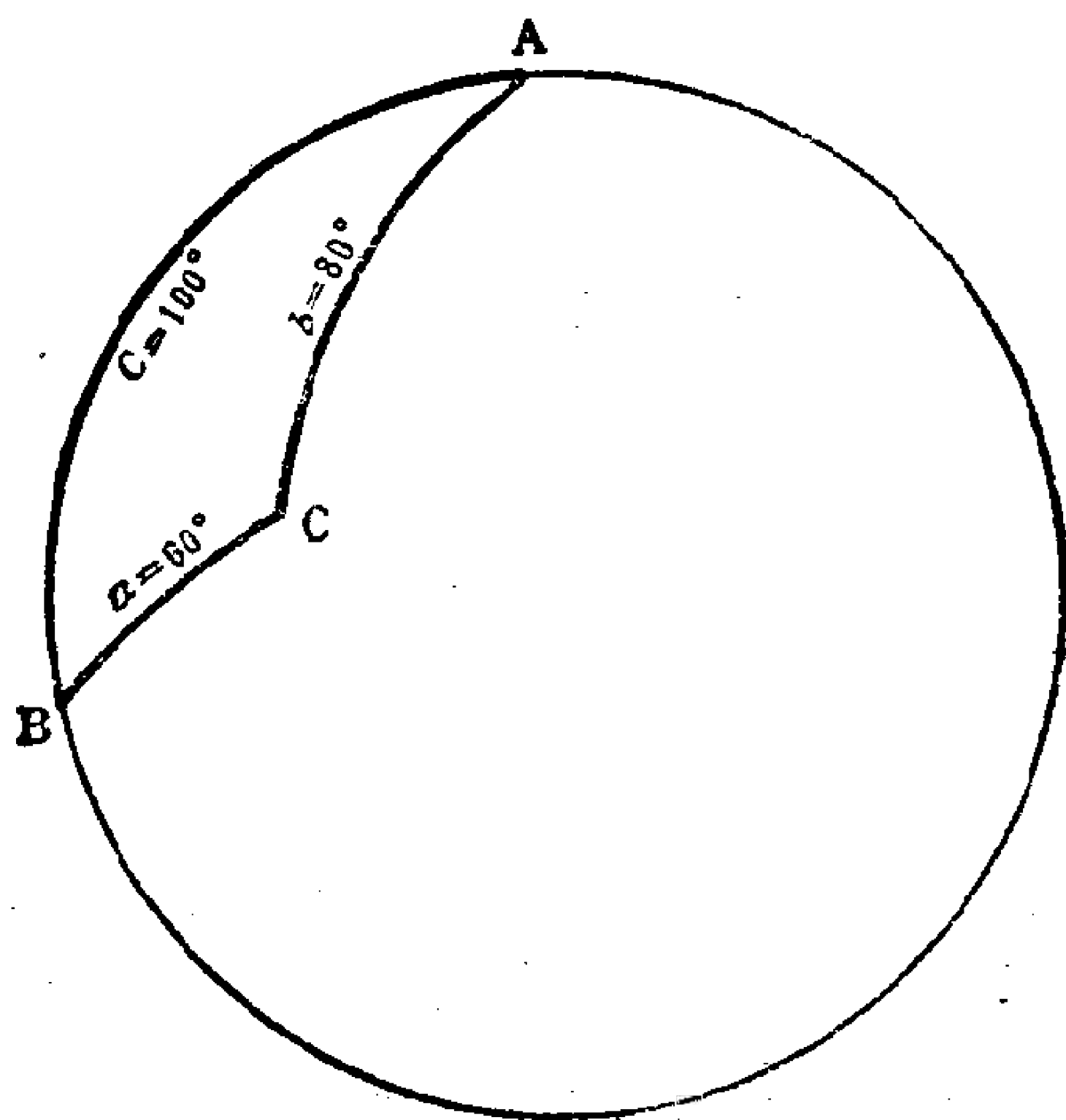
$$\begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{\pi R^2}{180^\circ} \cdot (A + B + C) - \pi R^2 \\ &= \frac{\pi R^2}{180^\circ} (A + B + C - 180^\circ) \\ &= \frac{\pi R^2}{180^\circ} \cdot E \end{aligned} \quad (35)$$

例題 29. 設球面三角形 ABC , $a=60^\circ, b=80^\circ, c=100^\circ$, 球的半径 $R=6370$ 公里，求該球面三角形的面积。

解 用留里尔球面角盈公式(33)

$$\operatorname{tg} \frac{E}{4} = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{P}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{P_a}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{P_b}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{P_c}{2}}$$

計算出球面角盈 E 的值，然后用球面三角形面积公式(35)



(例題 29 附圖)

$$S_{ABC} = \frac{\pi R^2}{180^\circ} \cdot E$$

計算出該球面三角形的面積。

$$a = 60^\circ$$

$$b = 80^\circ$$

$$c = 100^\circ$$

$$2P = 240^\circ$$

$$\pi = 3.14159$$

$$\log 0.49715$$

$$P = 120^\circ \quad \frac{P}{2} = 60^\circ$$

$$L\lg 10.23856$$

$$R = 6370$$

$$2\log 7.60828$$

$$P_a = 60^\circ \quad \frac{P_a}{2} = 30^\circ$$

$$L\lg 9.76144$$

$$E = 56^\circ.864$$

$$\log 1.75484$$

$$P_b = 40^\circ \quad \frac{P_b}{2} = 20^\circ$$

$$L\lg 9.56107$$

$$180^\circ$$

$$C - \log \bar{3}.74473$$

$$P_c = 20^\circ \quad \frac{P_c}{2} = 10^\circ$$

$$L\lg 9.24632$$

$$S_{ABC} = 40.272,000(\text{km})^2 \log 7.60500$$

$$2 \quad \underline{18.80739}$$

$$E = 56^\circ.864 \quad \frac{E}{4} = 14^\circ.216 \quad L\lg 9.40370$$

第五章 球面內切圓及球面外接圓

§ 11. 球面內切圓及球面外接圓

11.1 球面內切圓、球面外接圓、球面半徑

設一球面小圓位于球面三角形之內，小圓的周與三角形的三邊相切（圖 22a），該小圓叫作球面三角形的**球面內切圓**。設小圓的周與球面三角形三個頂點相接（圖 22b），則該小圓叫作球面三角形的**球面外接圓**。由球面小圓的周到它的極的球面距離，叫作**球面半徑**。今以 ρ_1 表示球面內切圓的球面半徑， ρ_0 表示球面外接圓的球面半徑。

球面內切圓半徑及球面外接圓半徑均可用球面三角形的邊或角的函數表示之。

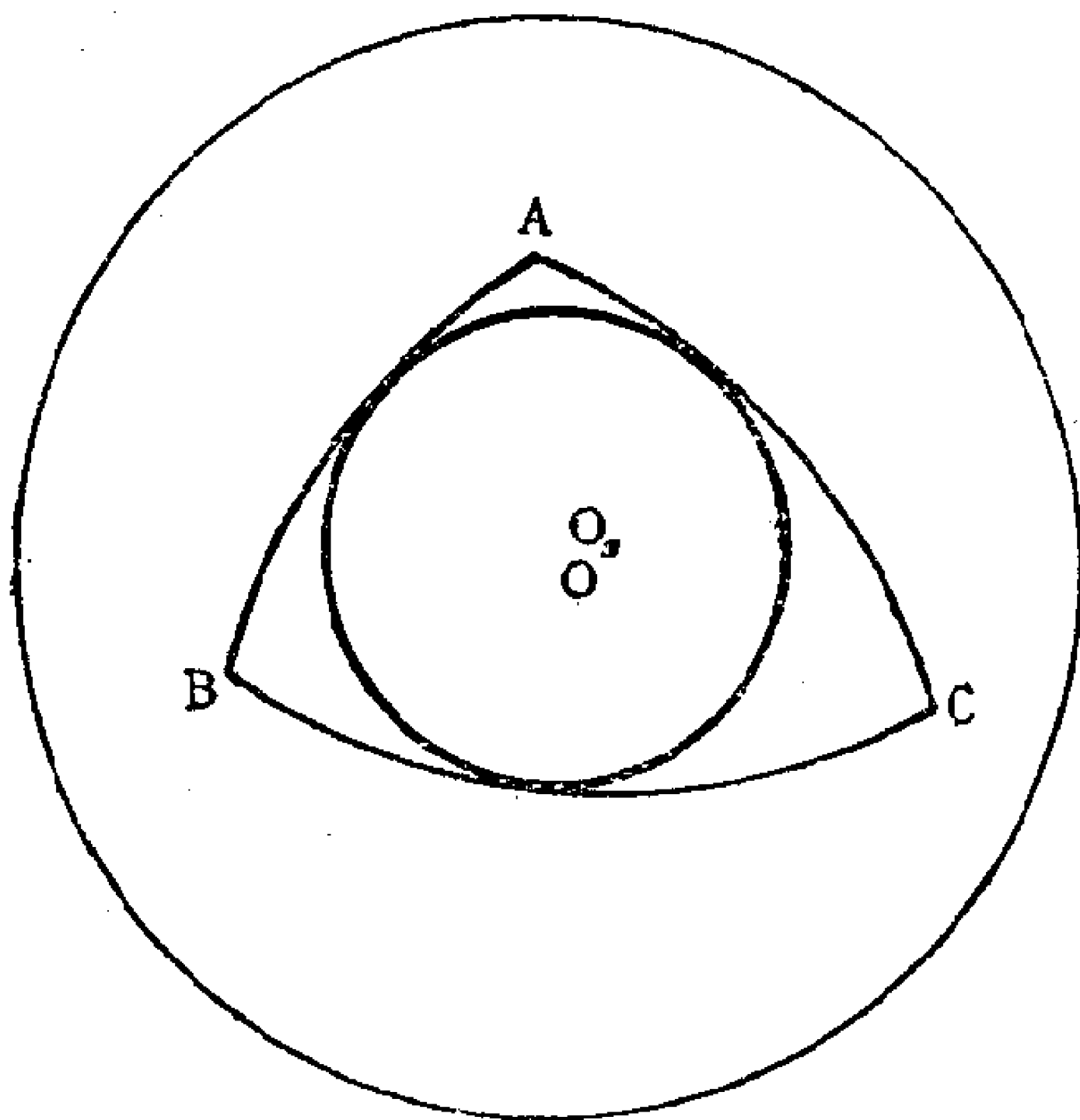


圖 22a

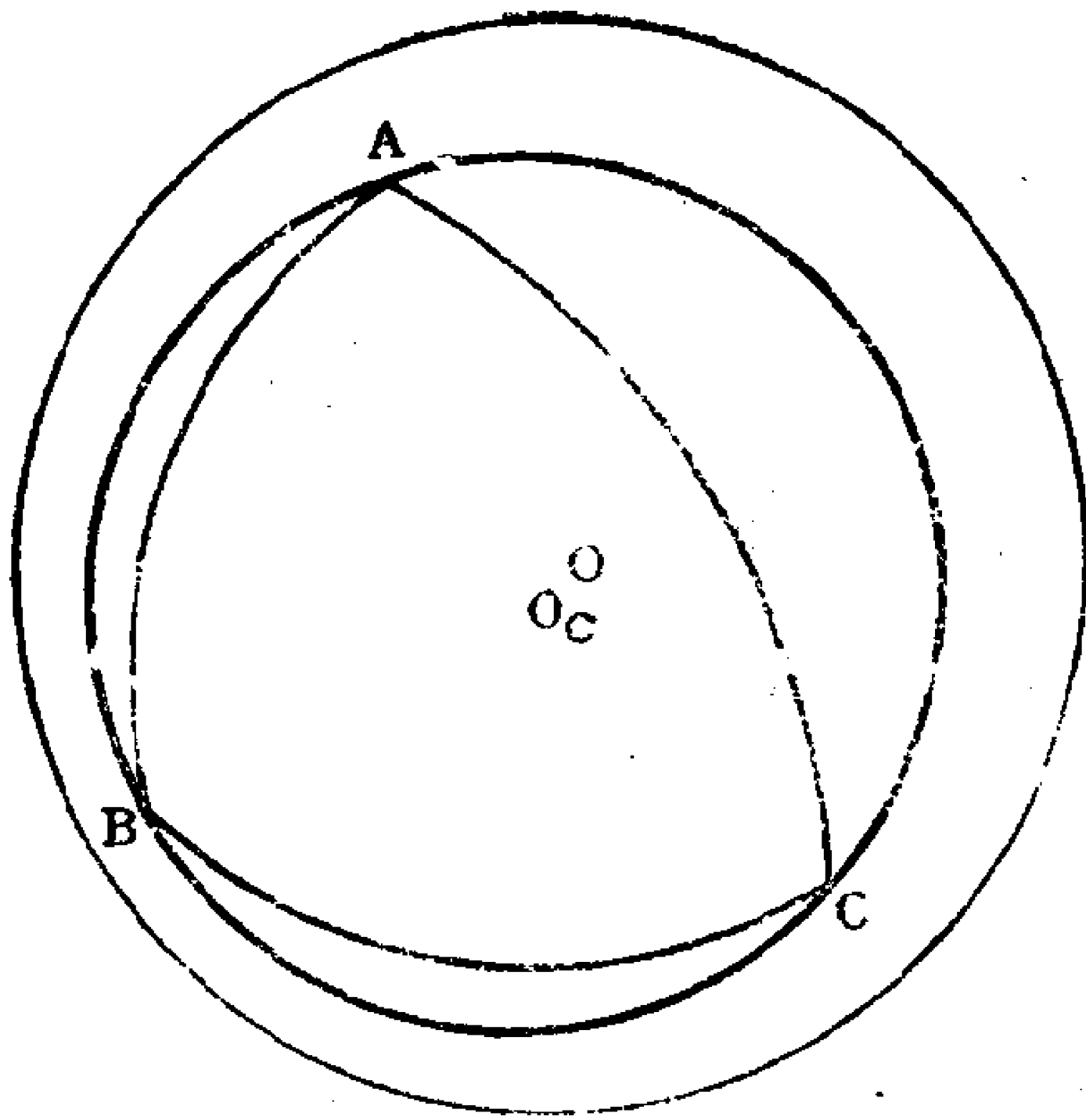


圖 22b

11.2 球面內切圓半徑公式

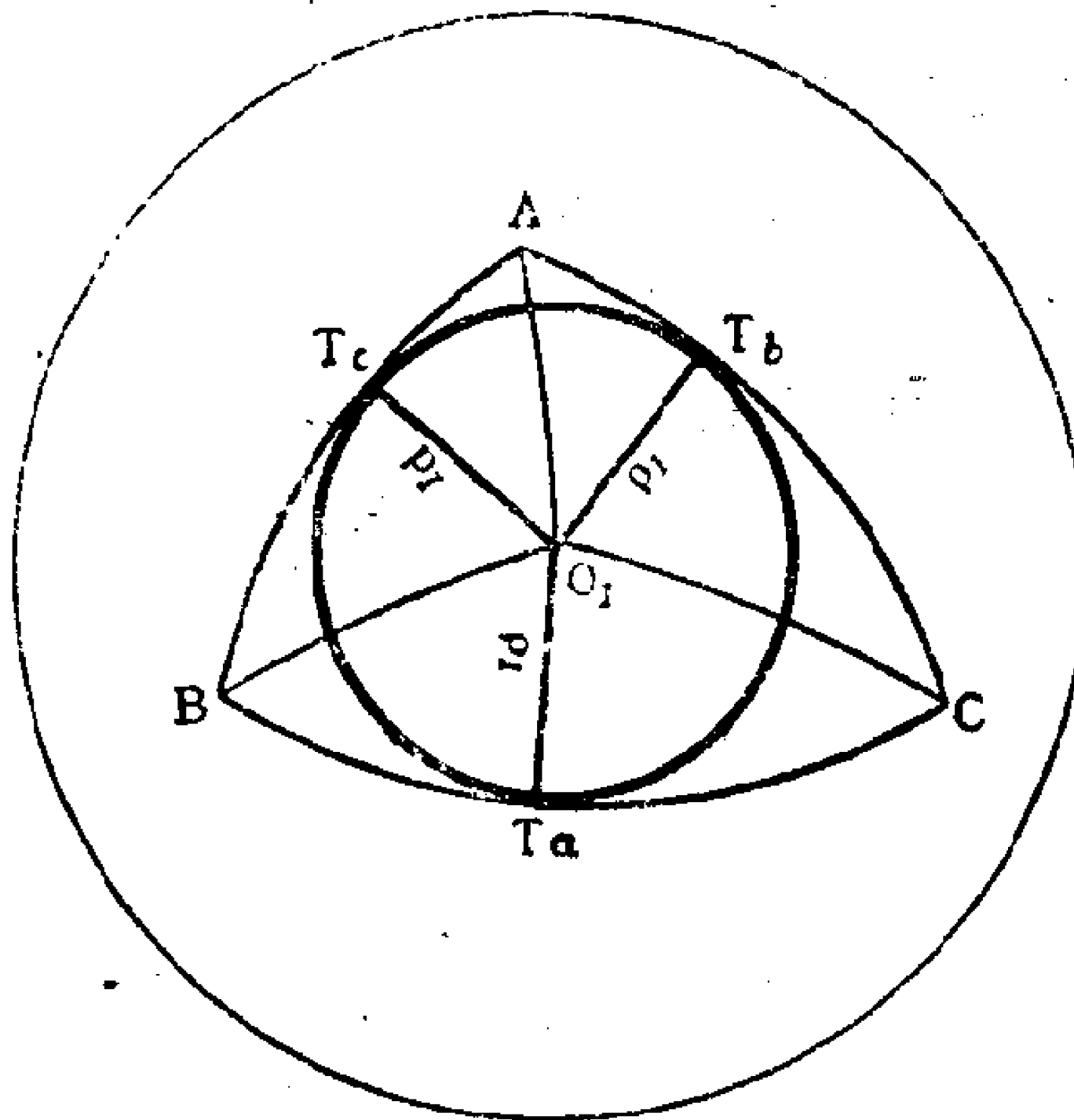


圖 23

圖 23, O_I 为球面三角形 ABC 的內切圓的極。內切圓切 a, b, c 的边于 T_a, T_b, T_c 等点。

$$\begin{aligned} \text{今} \quad \widehat{AT}_b &= \widehat{AT}_c & O_I \widehat{AT}_b &= O_I \widehat{AT}_c = \frac{A}{2} \\ \widehat{BT}_c &= \widehat{BT}_a & O_I \widehat{BT}_c &= O_I \widehat{BT}_a = \frac{B}{2} \\ \widehat{CT}_a &= \widehat{CT}_b & O_I \widehat{CT}_a &= O_I \widehat{CT}_b = \frac{C}{2} \end{aligned}$$

但 $\widehat{AT}_b + \widehat{BT}_c + \widehat{CT}_a = \widehat{AT}_c + \widehat{BT}_a + \widehat{CT}_b = p$

故
$$\begin{aligned} \widehat{AT}_b &= p - \widehat{BT}_c - \widehat{CT}_a \\ &= p - \widehat{BT}_a - \widehat{CT}_a \\ &= p - a \\ &= p_a \end{aligned}$$

今由球面直角三角形 $AO_I T_b$ 得

$$\operatorname{tg} \widehat{O_I T_b} = \sin \widehat{AT}_b \cdot \operatorname{tg} O_I \widehat{AT}_b$$

即
$$\operatorname{tg} \widehat{O_I T_b} = \sin p_a \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2}$$

但由球面半角公式(10)

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin p_b \cdot \sin p_c}{\sin p \cdot \sin p_a}}$$

代入上式并化简之，得球面内切圆半径公式

$$\operatorname{tg} \rho_I = \sqrt{\frac{\sin p_a \cdot \sin p_b \cdot \sin p_c}{\sin p}} \quad (36)$$

又由德朗布尔方程式(17)

$$\sin \frac{b+c}{2} = \frac{\sin \frac{a}{2}}{\sin \frac{A}{2}} \cdot \cos \frac{B-C}{2} \quad (\text{I})$$

$$\cos \frac{b+c}{2} = \frac{\cos \frac{a}{2}}{\sin \frac{A}{2}} \cdot \cos \frac{B+C}{2} \quad (\text{II})$$

(I) $\times \cos \frac{a}{2} - (\text{II}) \times \sin \frac{a}{2}$ 并化簡之, 得

$$\sin p_a = \frac{\sqrt{-\cos P \cdot \cos P_A \cdot \cos P_B \cdot \cos P_C}}{2 \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}} \quad (\text{III})$$

由球面直角三角形 APT_b 已証

$$\operatorname{tg} \rho_I = \sin p_a \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2}$$

以(III)代入并化簡之, 則得球面內切圓半徑公式

$$\operatorname{tg} \rho_I = \frac{\sqrt{-\cos P \cdot \cos P_A \cdot \cos P_B \cdot \cos P_C}}{2 \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}} \quad (37)$$

$$\text{但 } P = 90^\circ + \frac{E}{2}, \quad P_A = 90^\circ - \left(A - \frac{E}{2}\right),$$

$$P_B = 90^\circ - \left(B - \frac{E}{2}\right), \quad P_C = 90^\circ - \left(C - \frac{E}{2}\right)$$

將上述关系代入(37), 則球面內切圓半徑公式

$$\operatorname{tg} \rho_I = \frac{\sqrt{\sin \frac{E}{2} \cdot \sin \left(A - \frac{E}{2}\right) \cdot \sin \left(B - \frac{E}{2}\right) \cdot \sin \left(C - \frac{E}{2}\right)}}{2 \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}} \quad (38)$$

11.3 球面外接圓半徑公式

圖 24, O_c 为球面三角形 ABC 的外接圓的極。由 O_c 作大圓弧 $O_c M_a$, $O_c M_b$, $O_c M_c$ 分別垂直于球面三角形的边 a 、 b 、 c , 則 M_a , M_b , M_c 为各該三边的中分点。即

$$\widehat{B M_a} = \widehat{C M_a} = \frac{a}{2}$$

$$\widehat{C M_b} = \widehat{A M_b} = \frac{b}{2}$$

$$\widehat{A M_c} = \widehat{B M_c} = \frac{c}{2}$$

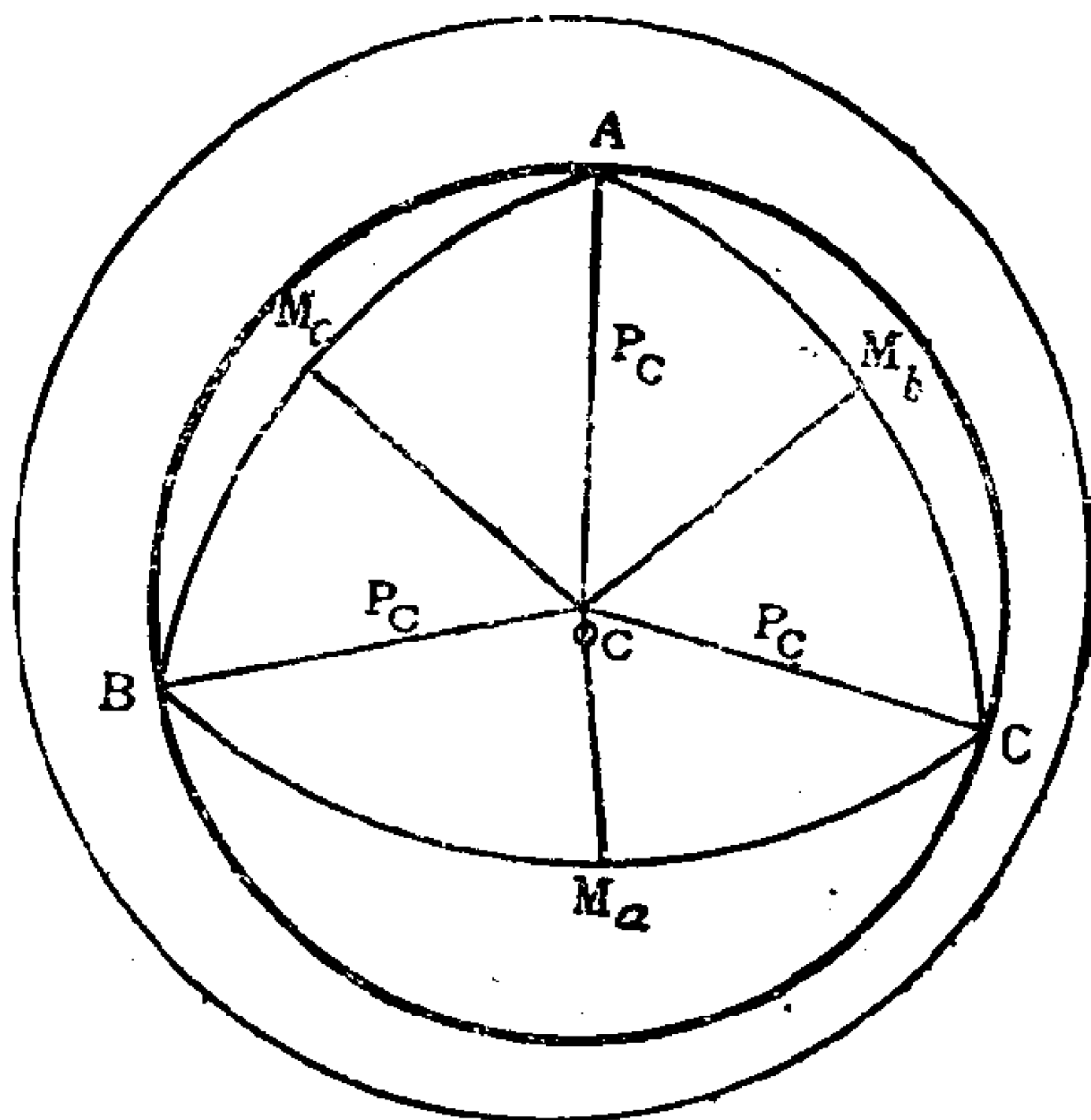


圖 24

今

$$\widehat{O_c A} = \widehat{O_c B} = \widehat{O_c C} = \rho_c$$

故

$$\widehat{O_c A M_b} = \widehat{O_c C M_b}$$

$$\widehat{O_c B M_c} = \widehat{O_c A M_c}$$

$$\widehat{O_c C M_a} = \widehat{O_c B M_a}$$

$$\begin{aligned} \text{但 } \widehat{O_c A M_b} + \widehat{O_c B M_c} + \widehat{O_c C M_a} + \widehat{O_c C M_b} + \widehat{O_c A M_c} + \widehat{O_c B M_a} = \\ = (A + B + C) \end{aligned}$$

$$\text{故 } \widehat{O_c A M_b} + \widehat{O_c B M_c} + \widehat{O_c C M_a} = \frac{1}{2}(A + B + C)$$

$$\widehat{O_c A M_b} = \frac{1}{2}(A + B + C) - \widehat{O_c B M_c} - \widehat{O_c C M_a}$$

$$= \frac{1}{2}(A + B + C) - \widehat{O_c B M_c} - \widehat{O_c B M_a}$$

$$= \frac{1}{2}(A + B + C) - B$$

$$= \frac{A + C}{2} - \frac{B}{2}$$

今由球面直角三角形 O_cAM_b 得

$$\begin{aligned}\widehat{\text{tg}} PA &= \frac{\widehat{\text{tg}} AM_b}{\cos \widehat{O_cAM_b}} \\ &= \frac{\text{tg} \frac{b}{2}}{\cos \left(\frac{A+C}{2} - \frac{B}{2} \right)} \\ &= \frac{\text{tg} \frac{b}{2}}{\cos \frac{A+C}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{A+C}{2} \cdot \sin \frac{B}{2}}\end{aligned}$$

但德朗布尔方程式(17)

$$\cos \frac{A+C}{2} = \frac{\cos \frac{a+c}{2}}{\cos \frac{b}{2}} \cdot \sin \frac{B}{2} \quad (\text{I})$$

$$\sin \frac{A+C}{2} = \frac{\cos \frac{a-c}{2}}{\cos \frac{b}{2}} \cdot \cos \frac{B}{2} \quad (\text{II})$$

(I) $\times \cos \frac{B}{2} + (\text{II}) \times \sin \frac{B}{2}$, 则

$$\begin{aligned}&\cos \frac{A+C}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{A+C}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} = \\ &= \frac{\sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{B}{2}}{\cos \frac{b}{2}} \cdot \left(\cos \frac{a+c}{2} + \cos \frac{a-c}{2} \right)\end{aligned}$$

$$\text{于是 } \widehat{\text{tg}} PA = \frac{\text{tg} \frac{b}{2}}{\frac{\sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{B}{2}}{\cos \frac{b}{2}} \cdot \left(\cos \frac{a+c}{2} + \cos \frac{a-c}{2} \right)}$$

化簡之，得球面外接圓半徑公式

$$\operatorname{tg} \rho_c = \frac{2 \cdot \sin \frac{a}{2} \cdot \sin \frac{b}{2} \cdot \sin \frac{c}{2}}{\sqrt{\sin P \cdot \sin P_a \cdot \sin P_b \cdot \sin P_c}} \quad (39)$$

由球面直角三角形 PAM_b 已証

$$\operatorname{tg} \rho_c = \frac{\operatorname{tg} \frac{b}{2}}{\cos \frac{A+C-B}{2}}$$

由球面半邊公式(13)

$$\operatorname{tg} \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{-\cos P \cdot \cos P_B}{\cos P_A \cdot \cos P_C}}$$

而

$$\cos \frac{A+C-B}{2} = \cos P_B$$

故

$$\operatorname{tg} \rho_c = \frac{\sqrt{\frac{-\cos P \cdot \cos P_B}{\cos P_A \cdot \cos P_C}}}{\cos P_B}$$

化簡之，得球面外接圓半徑公式

$$\operatorname{tg} \rho_c = \sqrt{\frac{-\cos P}{\cos P_A \cdot \cos P_B \cdot \cos P_C}} \quad (40)$$

$$\text{但 } P = 90^\circ + \frac{E}{2}, \quad P_A = 90^\circ - \left(A - \frac{E}{2}\right),$$

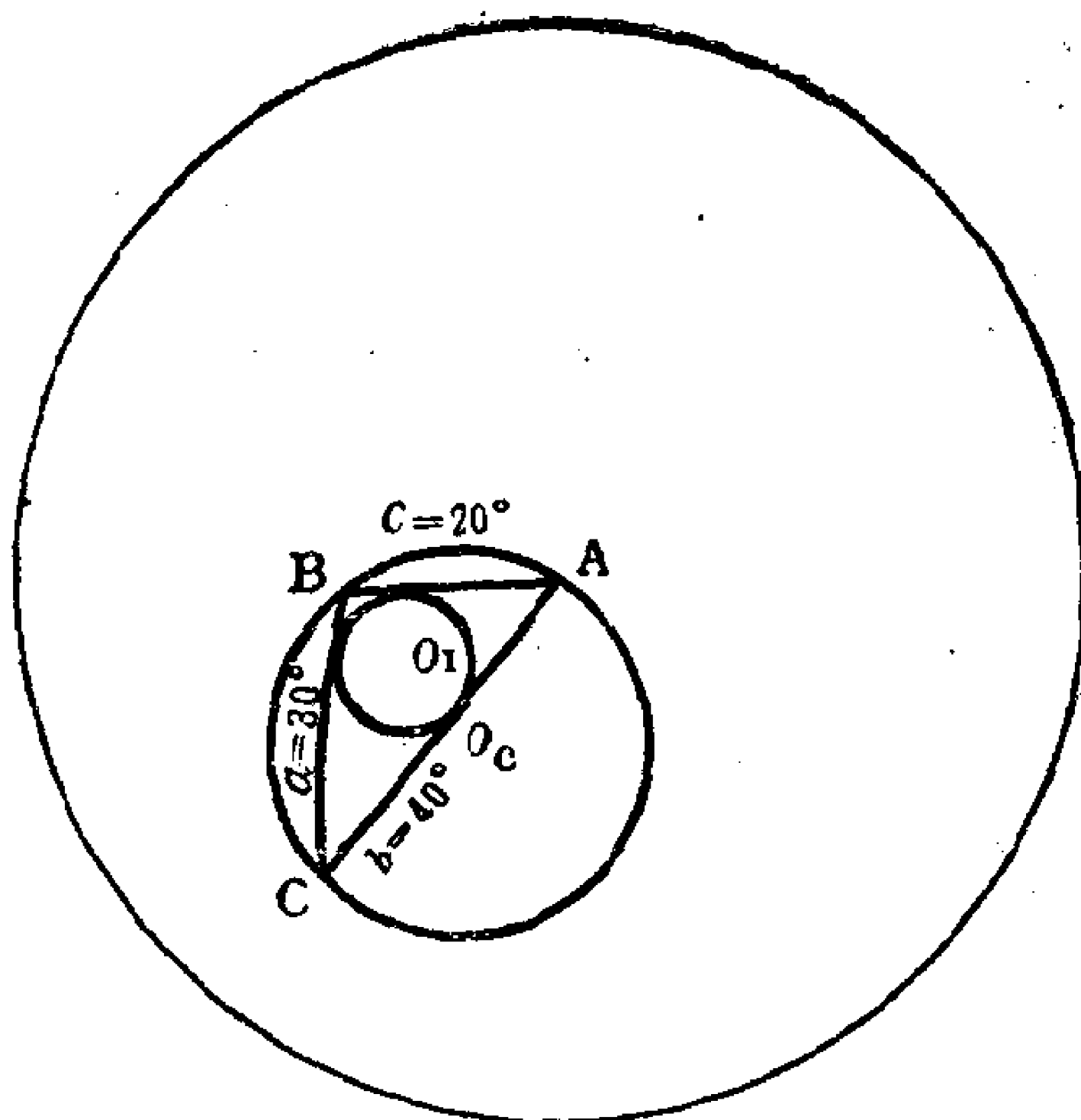
$$P_B = 90^\circ - \left(B - \frac{E}{2}\right), \quad P_C = 90^\circ - \left(C - \frac{E}{2}\right)$$

代入公式(40) 則球面外接圓半徑公式

$$\operatorname{tg} \rho_c = \sqrt{\frac{\sin \frac{E}{2}}{\sin \left(A - \frac{E}{2}\right) \cdot \sin \left(B - \frac{E}{2}\right) \cdot \sin \left(C - \frac{E}{2}\right)}} \quad (41)$$

例題 30. 設球面三角形 ABC , $a=30^\circ$, $b=40^\circ$, $c=20^\circ$; 求該球面三角形的內切圓及外接圓的半徑。

解



(例題 30 附圖)

由球面內切圓半徑公式(36)

$$\operatorname{tg} \rho_I = \sqrt{\frac{\sin p_a \cdot \sin p_b \cdot \sin p_c}{\sin p}}$$

由球面外接圓半徑公式(39)

$$\operatorname{tg} \rho_c = \frac{2 \cdot \sin \frac{a}{2} \cdot \sin \frac{b}{2} \cdot \sin \frac{c}{2}}{\sqrt{\sin p \cdot \sin p_a \cdot \sin p_b \cdot \sin p_c}}$$

可見球面外接圓半徑與球面內切圓的關係是

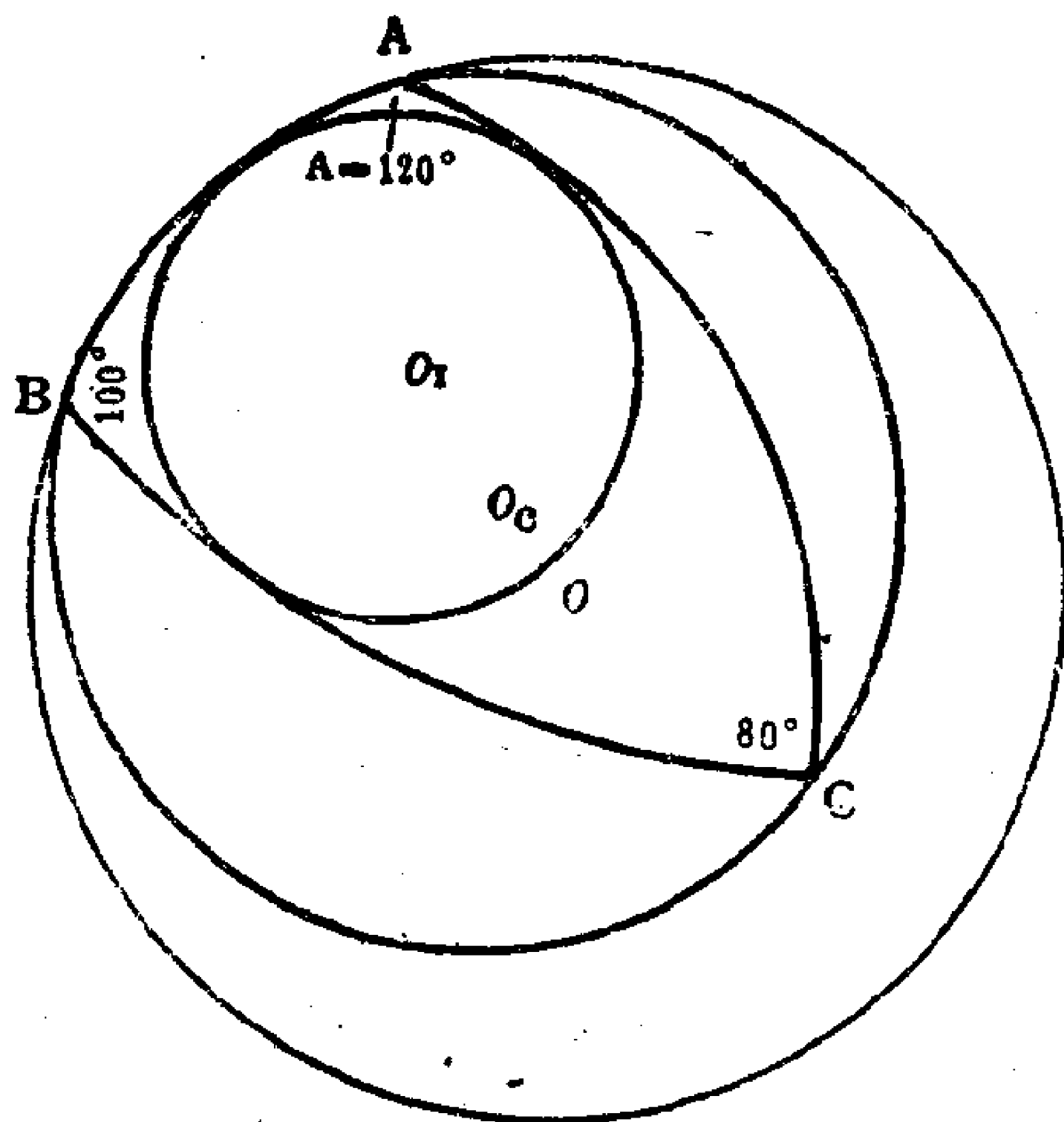
$$\operatorname{tg} \rho_c = 2 \cdot \sin \frac{a}{2} \cdot \sin \frac{b}{2} \cdot \sin \frac{c}{2} \cdot \operatorname{csc} p \cdot \operatorname{ctg} \rho_I$$

$a=30^\circ$	$\frac{a}{2}=15^\circ$		$L \sin$	9.41300
$b=40^\circ$	$\frac{b}{2}=20^\circ$		$L \sin$	9.53405
$c=20^\circ$	$\frac{c}{2}=10^\circ$		$L \sin$	9.23967
$p=45^\circ$		$L \operatorname{csc}$	0.15051	$L \operatorname{csc}$ 0.15051
$p_a=15^\circ$		$L \sin$	9.41300	
$p_b=5^\circ$		$L \sin$	8.94030	
$p_c=95^\circ$		$L \sin$	9.62595	

	2	18.12976	
$\rho_I = 6^\circ 37'.4$	Ltg	9.06488	Lctg 0.93512
			Log2 0.30103
$\rho_c = 20^\circ 31'.7$	Ltg	9.57338	

例題 31. 設球面三角形 ABC , $A=120^\circ$, $B=100^\circ$, $C=80^\circ$; 求該球面三角形的內切圓及外接圓的半徑。

解



(例題 31 附圖)

由球面內切圓半徑公式(38)

$$\operatorname{tg} \rho_I = \frac{\sqrt{\sin \frac{E}{2} \cdot \sin \left(A - \frac{E}{2} \right) \cdot \sin \left(B - \frac{E}{2} \right) \cdot \sin \left(C - \frac{E}{2} \right)}}{2 \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}}$$

由球面外接圓半徑公式(41)

$$\operatorname{tg} \rho_c = \sqrt{\frac{\sin \frac{E}{2}}{\sin \left(A - \frac{E}{2} \right) \cdot \sin \left(B - \frac{E}{2} \right) \cdot \sin \left(C - \frac{E}{2} \right)}}$$

可見球面內切圓半徑與球面外接圓半徑的關係是

$$\operatorname{ctg} \rho_I = 2 \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \cdot \operatorname{csc} \frac{E}{2} \cdot \operatorname{tg} \rho_c$$

$$A=120^\circ \quad \frac{A}{2}=60^\circ \quad L\cos \quad 9.69897$$

$$B=100^\circ \quad \frac{B}{2}=50^\circ \quad L\cos \quad 9.80807$$

$$C=80^\circ \quad \frac{C}{2}=40^\circ \quad L\cos \quad 9.88425$$

$$E=120^\circ \quad \frac{E}{2}=60^\circ \quad L\sin \quad 9.93753 \quad L\csc \quad 0.06247$$

$$A-\frac{E}{2}=60^\circ \quad L\csc \quad 0.06247$$

$$B-\frac{E}{2}=40^\circ \quad L\csc \quad 0.19193$$

$$C-\frac{E}{2}=20^\circ \quad L\csc \quad 0.46595$$

$$2 \quad \underline{0.65788}$$

$$\rho_c=64^\circ 52'.8 \quad Ltg \quad 0.32894 \quad Ltg \quad 0.32894$$

$$\log 2 \quad 0.30103$$

$$\rho_I=39^\circ 30'.7 \quad Lctg \quad 0.08373$$

第六章 球 面 曲 綫

§12. 球 面 座 标

12.1 球面坐标系

球面上和平面一样，可以利用座标法来确定点的位置，建立曲綫的方程式，从而对这样的点或曲綫进行研究。

球面坐标系有二类：

a) 球面極座标，天文学中的地平座标系属于这一类；

b) 球面直角座标，天文学中的赤道座标系，黄道座标系，以及航海学中的地理座标系等均属于这一类。

12.2 球面極座标

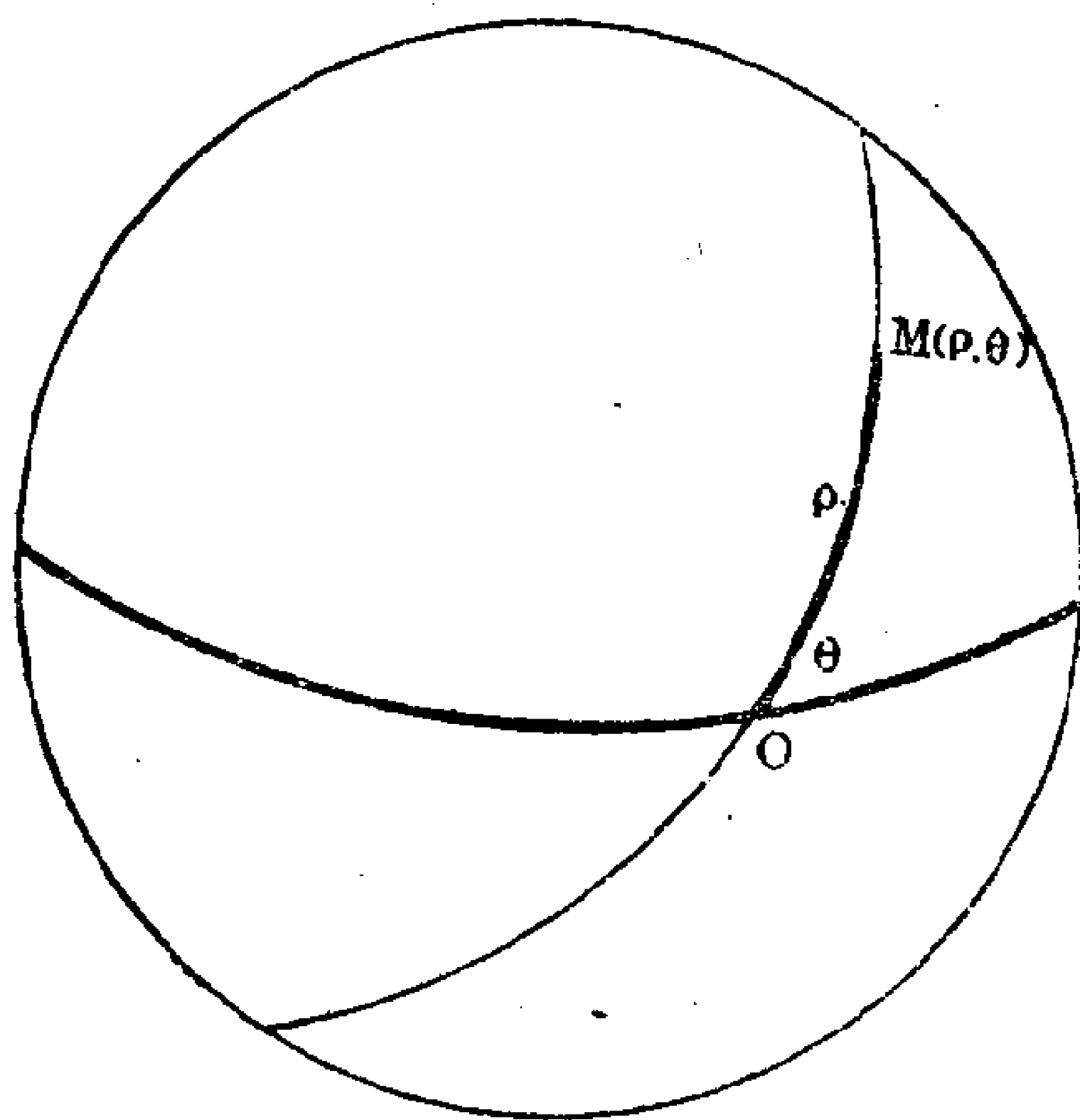


圖 25

球面極座标圖 25，是以球面上一个大圓作为座标的基准大圓，在基

准大圆上取一点 O 作为座标的原点。球面任意点 M 是由由原点到这个点的大圆距离 ρ ，以及这个大圆与基准大圆的交角 θ ，来确定它在球面上的位置。 (ρ, θ) 就叫作 M 点的球面极坐标，通常写成 $M(\rho, \theta)$ 。

12.3 球面直角坐标

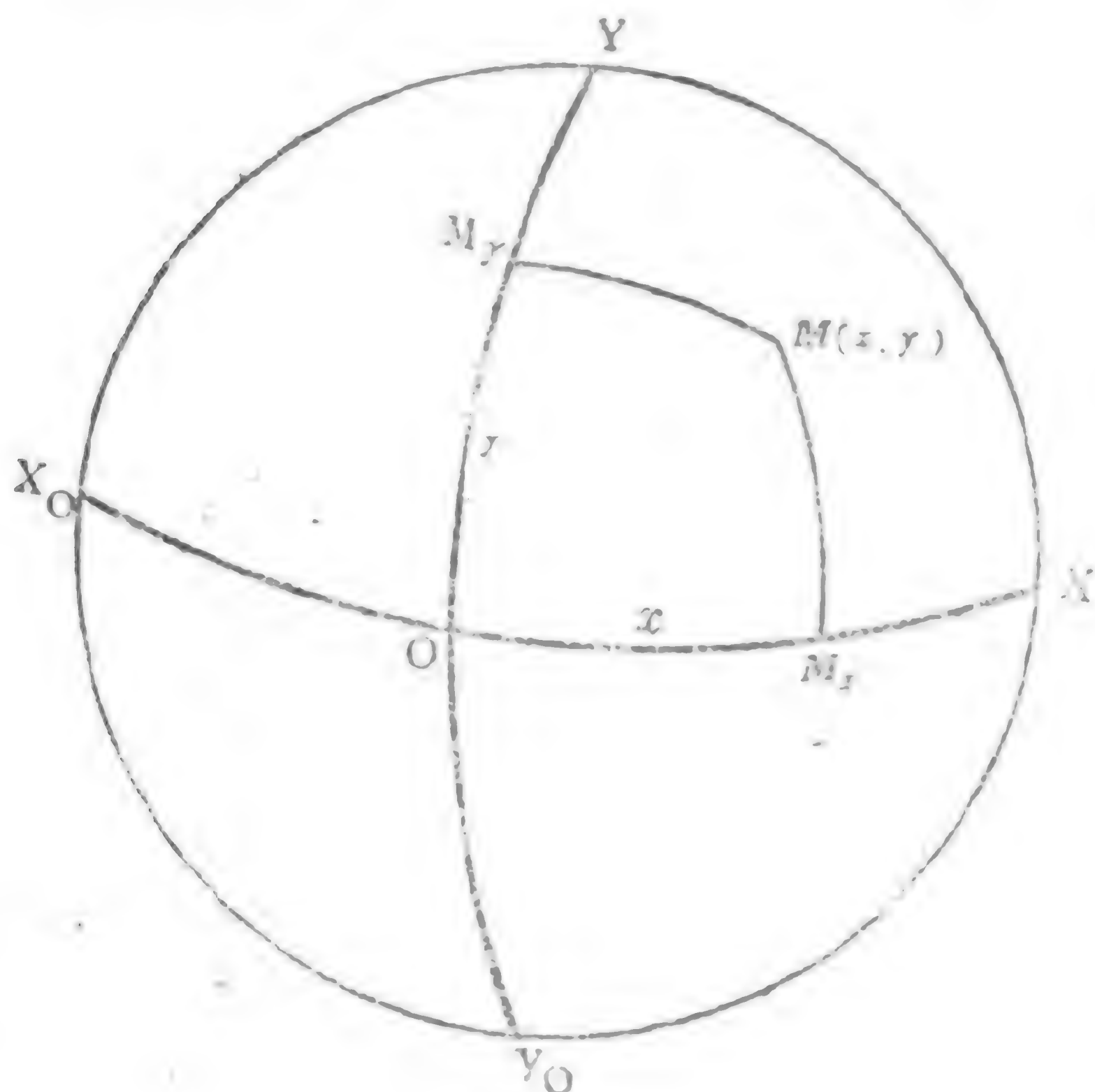


圖 26

球面直角坐标圖 26，是以两个互相交成直角的大圆作为座标的基准大圆，它的交点即为座标的原点。球面任意点的座标却是由该任意点所作的正交在基准大圆的大圆交点到原点的弧长。如图 26 所示，大圆 XOX_0 及 YOY_0 为基准大圆， O 为原点， M_x 及 M_y 分别为由任意点 M 所作的正交在基准大圆 XOX_0 及 YOY_0 的交点。命 OM_x 为 x ， OM_y 为 y ，于是 xy 为 M 点的球面直角坐标，通常写成 $M(x, y)$ 。

12.4 球面极坐标与球面直角坐标的关系

圖 27，大圆 XOX_0 及 YOY_0 为球面直角坐标系的基准大圆， O 为原点，于是对球面任意点 M 的座标有 $\widehat{OM_x} = x$ ， $\widehat{OM_y} = y$ 。

設 O 同时亦为球面极坐标的原点，而 XOX_0 为基准大圆，則对于 M 的球面极坐标有 $\widehat{OM} = \rho$ ， $\widehat{MOM_x} = \theta$ 。

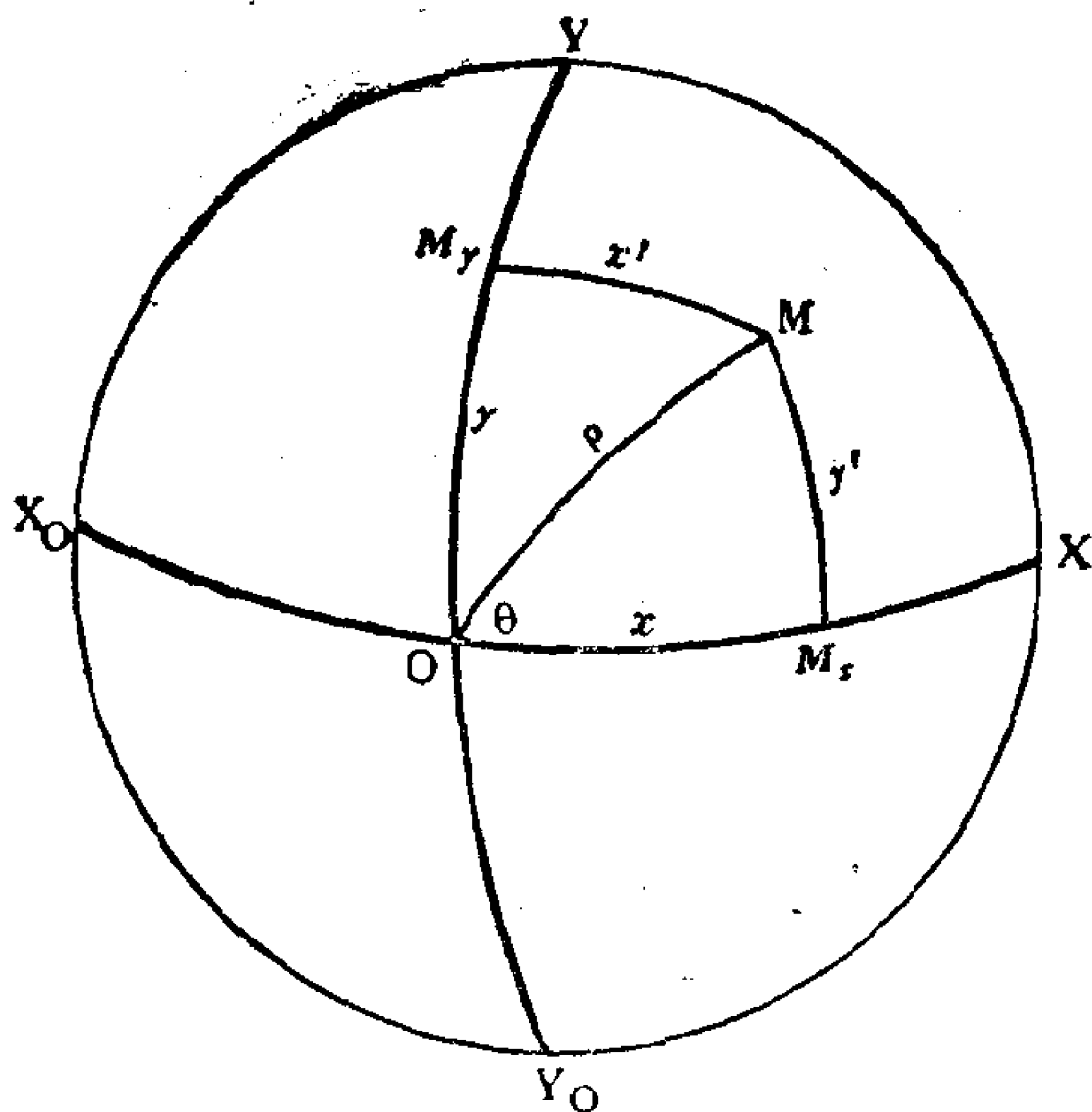


圖 27

由球面直角三角形 OM_xM 及 OM_yM ，可以証得兩座标系的关系为

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} x &= \operatorname{tg} \rho \cdot \cos \theta \\ \operatorname{tg} y &= \operatorname{tg} \rho \cdot \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

今以 $\widehat{MM_y} = x'$ ， $\widehat{MM_x} = y'$ ，称 $x'y'$ 为 M 点的輔助座标。今由球面直角三角形 OM_xM 及 OM_yM 得球面直角座标与其輔助座标的关系为：

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} x' &= \operatorname{tg} x \cdot \cos y \\ \operatorname{tg} y' &= \operatorname{tg} y \cdot \cos x \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin x &= \sin x' \cdot \sec y' \\ \sin y &= \sin y' \cdot \sec x' \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

§13. 球面曲綫方程式

13.1 球面大圓曲綫方程式

設球面大圓 GG_0 交球面直角座标基准大圓 XOX_0 于 A ， YOY_0 于 B ，（圖 28）。

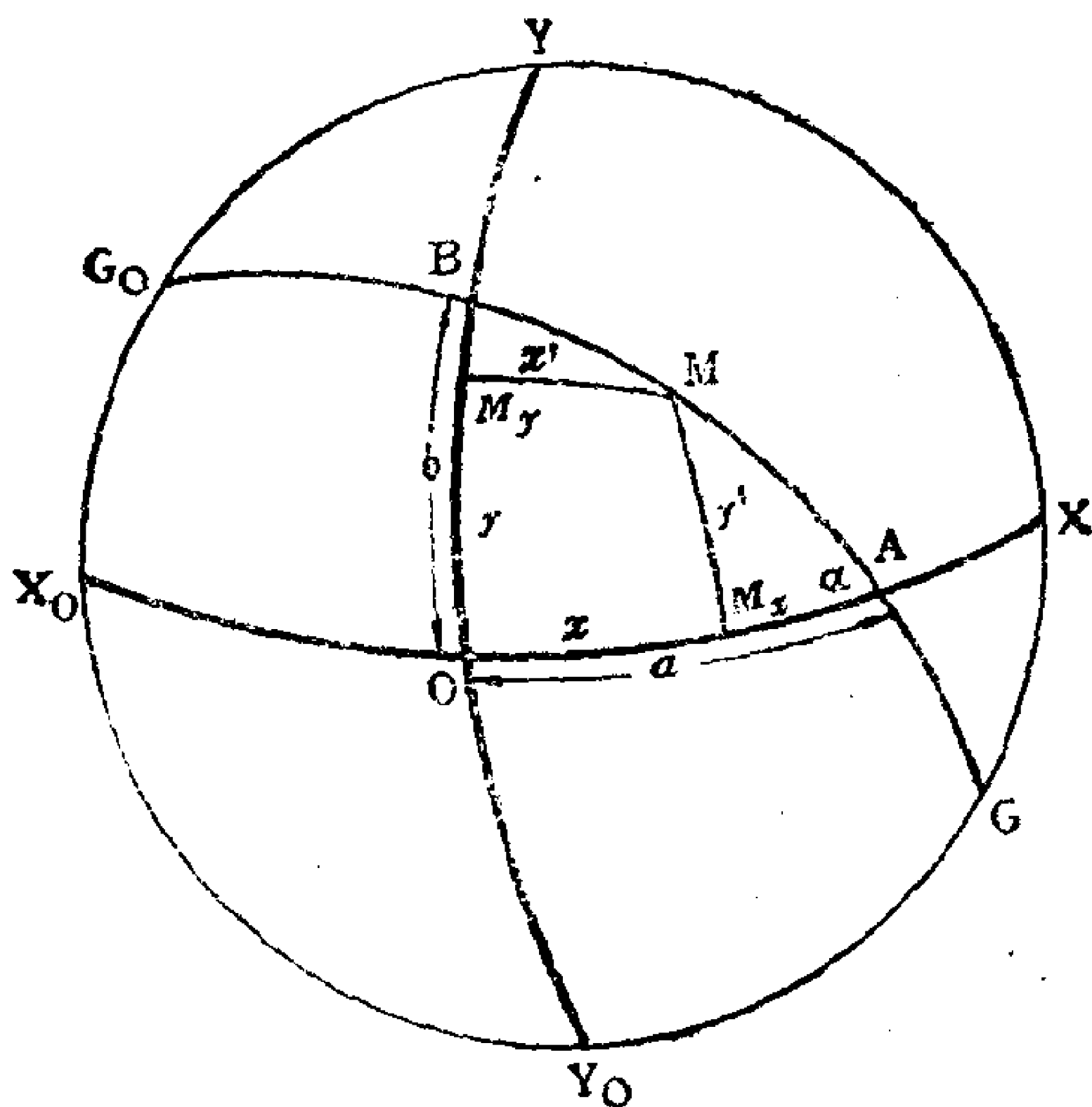


圖 28

命 $\widehat{OA} = a$, $\widehat{OB} = b$, 大圓 GG_0 与 XOX_0 的交角为 α 。由球面直角三角形 BOA 得

$$\operatorname{tg} \alpha = \sin a \cdot \operatorname{ctg} b$$

今在 \widehat{AB} 取任意点 M , 它的球面直角坐标为 (x, y) , 輔助坐标为 (x', y') , 于是在球面直角三角形 MM_xA 有

$$\sin(a-x) = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} y'$$

但由公式(43) $\operatorname{tg} y' = \operatorname{tg} y \cdot \cos x$

而 $\operatorname{tg} \alpha = \sin a \cdot \operatorname{ctg} b$

所以 $\sin(a-x) = \sin a \cdot \operatorname{ctg} b \cdot \operatorname{tg} y \cdot \cos x$

化簡上式得球面大圓曲綫方程式

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} a} + \frac{\operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} b} = 1 \quad (45)$$

对于球面大圓 GG_0 弧上的 $M_1(x_1, y_1)$ 及 $M_2(x_2, y_2)$ 点, 必然是适合公式(45), 因此

$$\frac{\operatorname{tg} x_1}{\operatorname{tg} a} + \frac{\operatorname{tg} y_1}{\operatorname{tg} b} = 1 \quad (45a)$$

$$\frac{\operatorname{tg} x_2}{\operatorname{tg} a} + \frac{\operatorname{tg} y_2}{\operatorname{tg} b} = 1 \quad (45b)$$

消去公式(45)(45a)及(45b)的 $\operatorname{tg} a$ 及 $\operatorname{tg} b$ 項，則得經過球面兩任意已知點 $M_1(x_1, y_1)$ ，及 $M_2(x_2, y_2)$ 的球面大圓曲綫方程式

$$\frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x_1}{\operatorname{tg} x_2 - \operatorname{tg} x_1} = \frac{\operatorname{tg} y - \operatorname{tg} y_1}{\operatorname{tg} y_2 - \operatorname{tg} y_1} \quad (46)$$

由球面大圓曲綫方程式(45)及(46)，可以看出，它和平面上的直綫方程式 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 及 $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ 是很相似的。只要在平面直綫方程式的各項前冠以正切函數，方程式就成為球面大圓曲綫方程式了。記住這個關係是非常有用的，因為其它的球面曲綫方程式與其對應的平面曲綫方程式都存在有同樣的關係，下面的內容將具體地証實這一點。

13.2 球面小圓曲綫方程式

設球面小圓的球面半徑為 r ，球面直角座標的原點在小圓中心 O (圖29)。

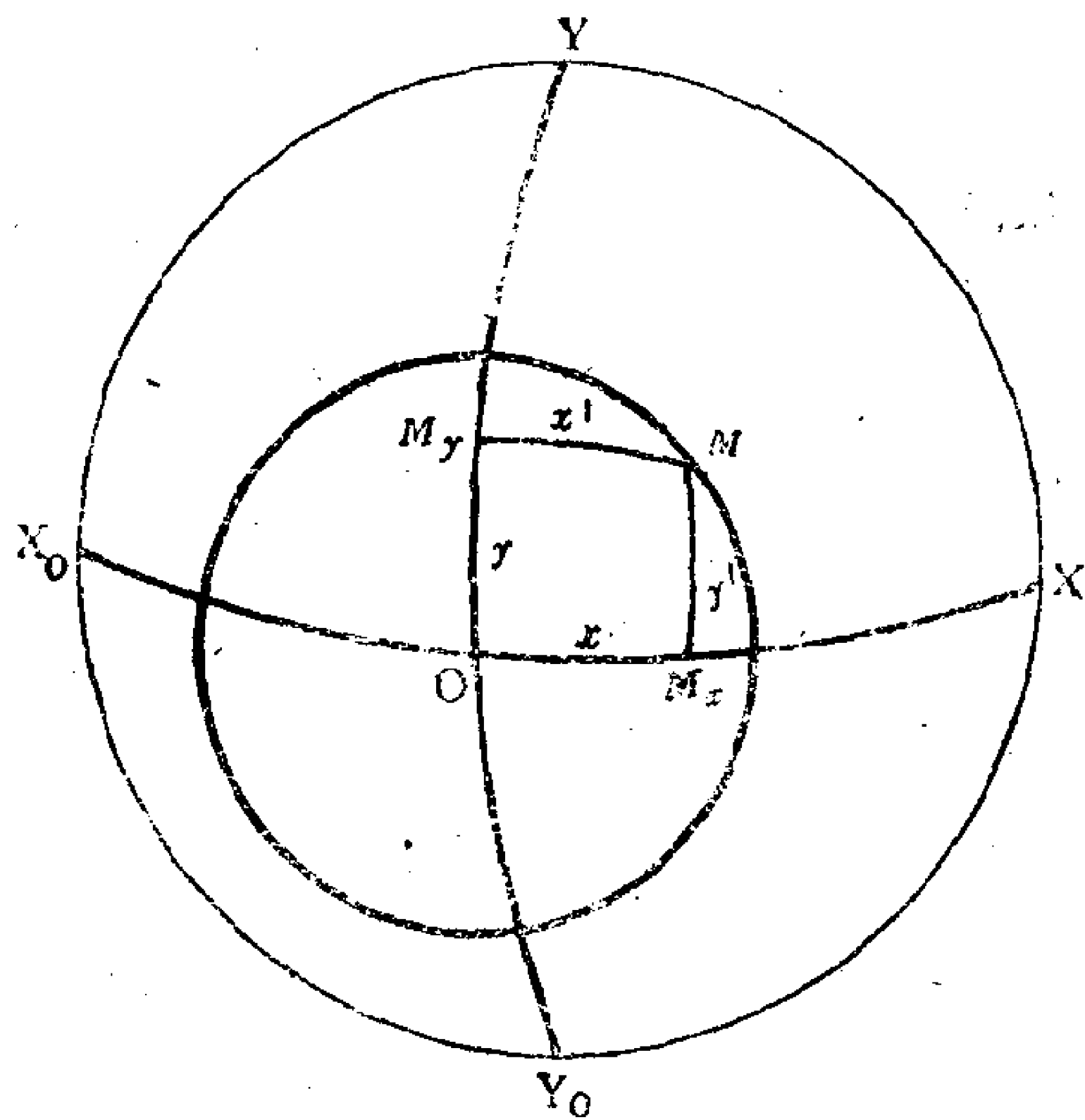


圖 29

自小圓的周取任意点 M , 它的座标为 (x, y) , 并命 $\widehat{MM}_y = x'$, $\widehat{MM}_x = y'$, (x', y') 为 M 的輔助座标。

今由球面直角三角形 OM_xM 得

$$\cos r = \cos x \cdot \cos y'$$

即

$$\sec^2 r = \sec^2 x \cdot \sec^2 y'$$

或

$$(1 + \operatorname{tg}^2 r) = (1 + \operatorname{tg}^2 x) \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 y')$$

但由公式(43)

$$\operatorname{tg} y' = \operatorname{tg} y \cdot \cos x,$$

故

$$(1 + \operatorname{tg}^2 r) = (1 + \operatorname{tg}^2 x) \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 y \cdot \cos^2 x)$$

化簡之, 得球面小圓曲綫方程式

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y = \operatorname{tg}^2 r \quad (47)$$

13.3 球面橢圓曲綫方程式

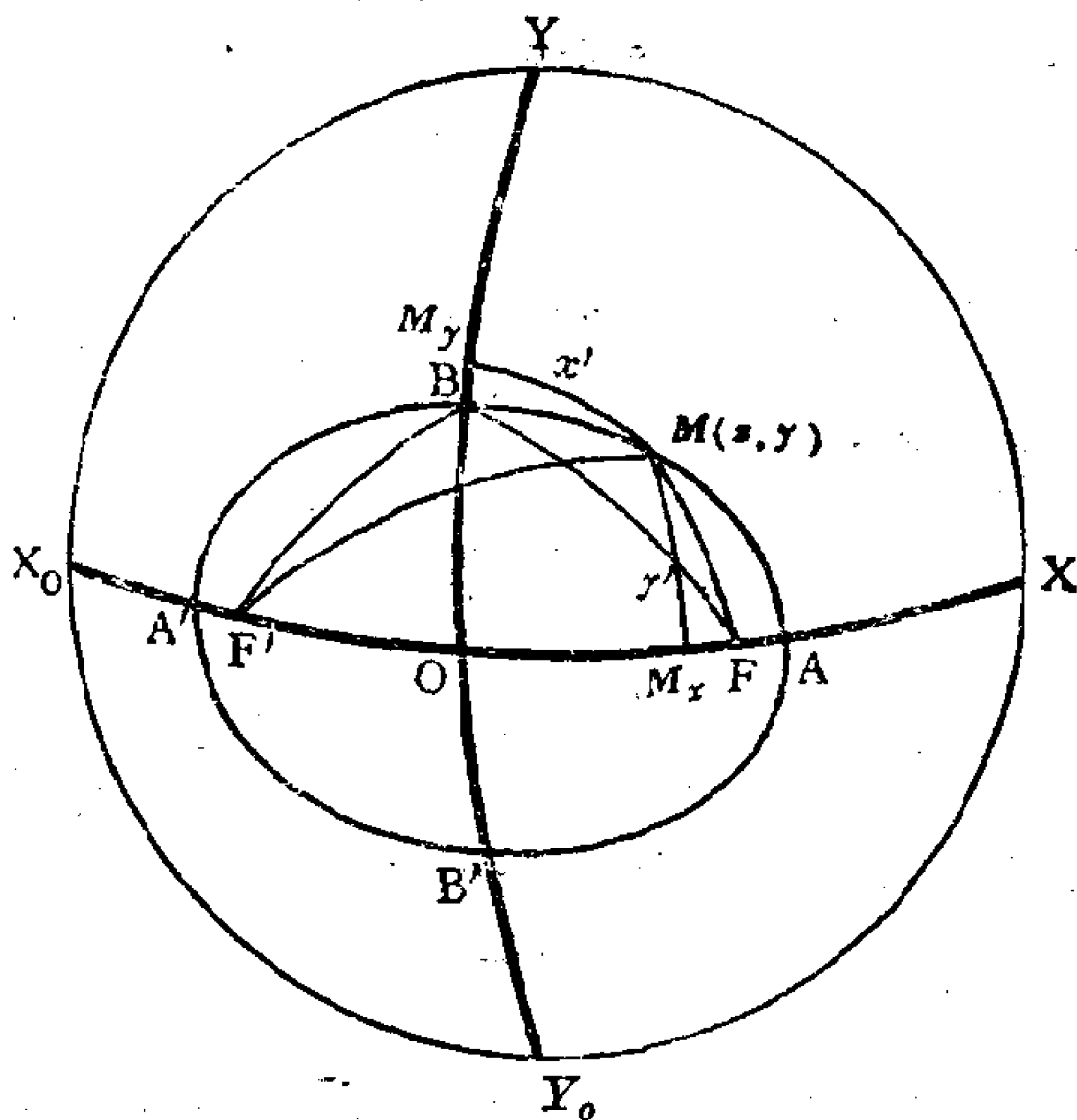


圖 30

設球面橢圓的中心在球面直角座标的原点 O (圖 30), 球面長軸 $\widehat{AA'}$ 与 $\widehat{XX_0}$ 共球面大圓, $\widehat{AA'} = 2a$; 球面短軸 $\widehat{BB'}$ 与 $\widehat{YY_0}$ 共球面大圓, $\widehat{BB'} = 2b$. F, F' 为橢圓的焦点, $\widehat{OF} = \widehat{OF'} = c$.

在橢圓的周取任意点 M , 它的座标为 (x, y) ; 并命 $\widehat{MM}_y = x'$, $\widehat{MM}_x = y'$

$=y'$, (x', y') 为 M 的辅助坐标。由任意点 M 到两焦点 F, F' 的距离和, 根据椭圆的性质, 应为 $2a$, 即 $\widehat{MF} + \widehat{MF'} = 2a$ 。

今由球面直角三角形 FM_xM 及 $F'M_xM$ 得

$$\cos \widehat{MF} = \cos(x-c) \cdot \cos y'$$

$$\cos \widehat{MF'} = \cos(x+c) \cdot \cos y'$$

两式相和并化简之, 得

$$\cos \frac{\widehat{MF} + \widehat{MF'}}{2} = \frac{\cos c}{\cos a} \cdot \cos x \cdot \cos y'$$

两式相乘并化简之, 得

$$\cos(\widehat{MF} - \widehat{MF'}) = 2(\cos^2 x - \sin^2 c) \cdot \cos^2 y' - \cos 2a$$

但 $\cos(\widehat{MF} - \widehat{MF'}) = 2 \cdot \cos^2 \frac{\widehat{MF} - \widehat{MF'}}{2} - 1$

所以

$$2(\cos^2 x - \sin^2 c) \cos^2 y' - \cos 2a = 2 \cdot \frac{\cos^2 c}{\cos^2 a} \cdot \cos^2 x \cdot \cos^2 y' - 1$$

但由球面直角三角形 BOF 得

$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos b}$$

即 $\cos^2 c = \frac{\cos^2 a}{\cos^2 b} \quad \sin^2 c = 1 - \frac{\cos^2 a}{\cos^2 b}$

而由公式(43) $\operatorname{tg} y' = \operatorname{tg} y \cdot \cos x$

即 $\operatorname{tg}^2 y' = \operatorname{tg}^2 y \cdot \cos^2 x$

所以 $2\left(\cos^2 x - 1 + \frac{\cos^2 a}{\cos^2 b}\right) \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y \cdot \cos^2 x} - \cos 2a$

$$= 2 \cdot \frac{\cos^2 a}{\cos^2 b} \cdot \frac{\cos^2 x}{\cos^2 a} \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y \cdot \cos^2 x} - 1$$

化简之, 得球面椭圆曲线方程式

$$\frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 a} + \frac{\operatorname{tg}^2 y}{\operatorname{tg}^2 b} = 1 \quad (48)$$

13.4 球面双曲线方程式

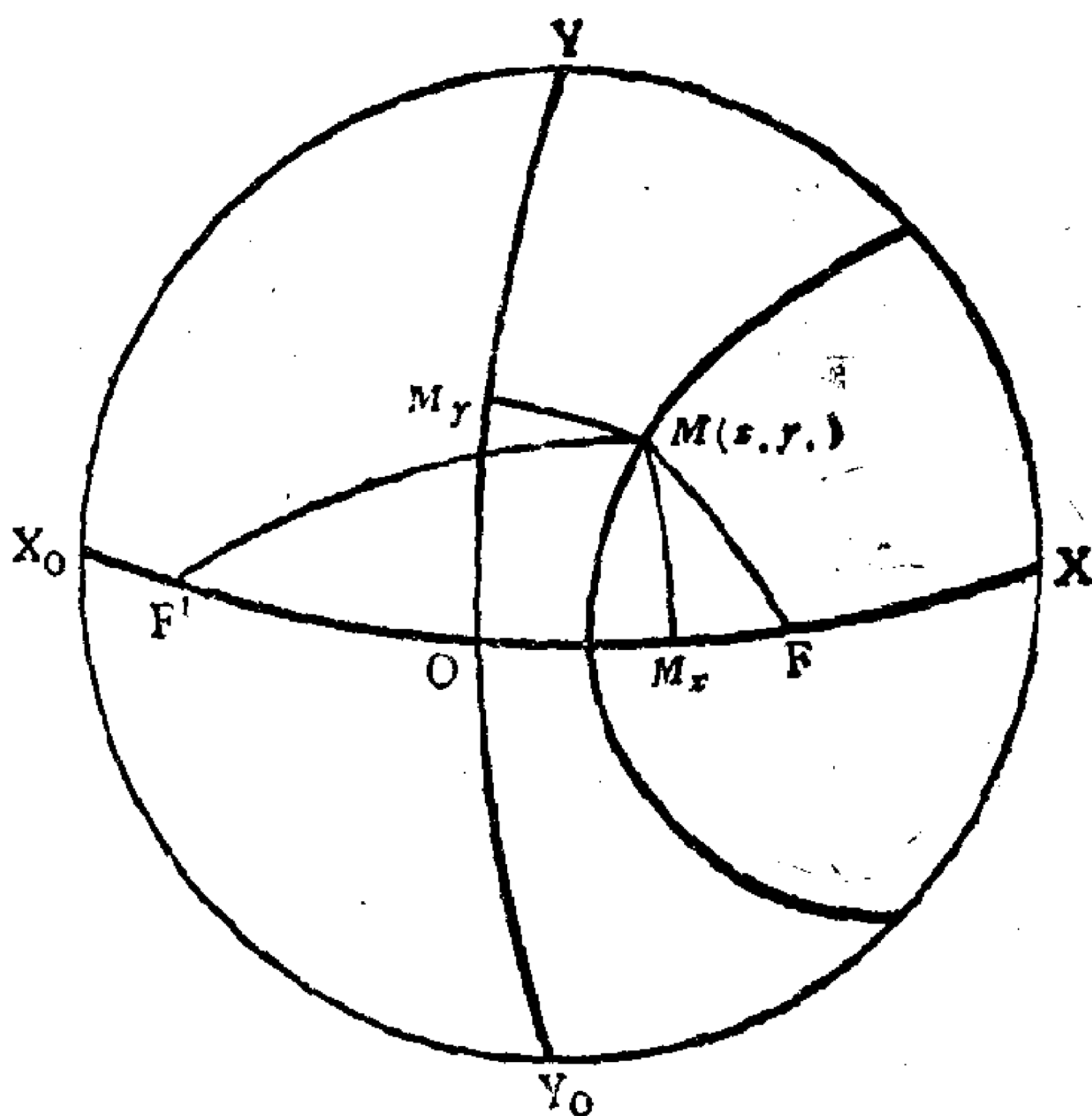


圖 31

設球面双曲线的焦点 F 及 F' 位于球面直角坐标基准大圆 XOX_0 上, O 为坐标原点, $\widehat{OF} = \widehat{OF'} = c$ (圖 31)。

在球面双曲线上取任意点 M , 它的坐标为 (x, y) , 辅助座标 $x' = \widehat{MM_y}$, $y' = \widehat{MM_x}$ 。由任意点 M 到两焦点的距离差, 根据球面双曲线的性质, 应为 $2a$, 即 $\widehat{MF'} - \widehat{MF} = 2a$ 。

今由球面直角三角形 FM_xM 及 $F'M_xM$ 得

$$\cos \widehat{MF} = \cos(x-c) \cdot \cos y'$$

$$\cos \widehat{MF'} = \cos(x+c) \cdot \cos y'$$

兩式相和并化簡之, 得

$$\cos \frac{\widehat{MF} + \widehat{MF'}}{2} = \frac{\cos c}{\cos a} \cdot \cos x \cdot \cos y'$$

兩式相乘并化簡之, 得

$$\cos (\widehat{MF} + \widehat{MF'}) = 2(\cos^2 x - \sin^2 c) \cdot \cos^2 y' - \cos 2a$$

但 $\cos(\widehat{MF} + \widehat{MF'}) = 2 \cdot \cos^2 \frac{\widehat{MF} + \widehat{MF'}}{2} - 1$

所以

$$2(\cos^2 x - \sin^2 c) \cdot \cos^2 y' - \cos 2a = 2 \cdot \frac{\cos^2 c}{\cos^2 a} \cdot \cos^2 x \cdot \cos^2 y' - 1$$

即 $\left(1 - \frac{\cos^2 c}{\cos^2 a}\right) \cdot \cos^2 x + \sin^2 a \cdot \operatorname{tg}^2 y' = \sin^2 c - \sin^2 a$

由公式(43) $\operatorname{tg} y' = \operatorname{tg} y \cdot \cos x$

代入上式并化简之，得

$$\frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 a} - \frac{\operatorname{tg}^2 y}{\frac{\cos^2 a - \cos^2 c}{\cos^2 a}} = 1$$

命 $\frac{\cos^2 a - \cos^2 c}{\cos^2 a} = \operatorname{tg}^2 b$

于是得球面双曲线方程式

$$\frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 a} - \frac{\operatorname{tg}^2 y}{\operatorname{tg}^2 b} = 1 \quad (49)$$

附录

1. 球面三角公式彙編

公 式 名 称	公 式	編 号
球面正弦公式	$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$	(1)
球面五联关系式	$\begin{aligned} \sin a \cdot \cos B &= \cos b \cdot \sin c - \sin b \cdot \cos c \cdot \cos A \\ \sin a \cdot \cos C &= \cos c \cdot \sin b - \sin c \cdot \cos b \cdot \cos A \\ \sin b \cdot \cos A &= \cos a \cdot \sin c - \sin a \cdot \cos c \cdot \cos B \\ \sin b \cdot \cos C &= \cos c \cdot \sin a - \sin c \cdot \cos a \cdot \cos B \\ \sin c \cdot \cos A &= \cos a \cdot \sin b - \sin a \cdot \cos b \cdot \cos C \\ \sin c \cdot \cos B &= \cos b \cdot \sin a - \sin b \cdot \cos a \cdot \cos C \\ \sin A \cdot \cos b &= \cos B \cdot \sin C + \sin B \cdot \cos C \cdot \cos a \\ \sin A \cdot \cos c &= \cos C \cdot \sin B + \sin C \cdot \cos B \cdot \cos a \\ \sin B \cdot \cos a &= \cos a \cdot \sin C + \sin A \cdot \cos C \cdot \cos b \\ \sin B \cdot \cos c &= \cos C \cdot \sin A + \sin C \cdot \cos A \cdot \cos b \\ \sin C \cdot \cos a &= \cos a \cdot \sin B + \sin A \cdot \cos B \cdot \cos c \\ \sin C \cdot \cos b &= \cos B \cdot \sin A + \sin B \cdot \cos A \cdot \cos c \end{aligned}$	(2)
		(2a)

公 式 名 稱	公 式	編 號
球面余弦公式	$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$ $\cos b = \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos B$ $\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C$	(3)
	$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$ $\cos B = \frac{\cos b - \cos a \cdot \cos c}{\sin a \cdot \sin c}$ $\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cdot \cos b}{\sin a \cdot \sin b}$	(3a)
	$\cos A = -\cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \sin C \cdot \cos a$ $\cos B = -\cos A \cdot \cos C + \sin A \cdot \sin C \cdot \cos b$ $\cos C = -\cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B \cdot \cos C$	(3b)
	$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cdot \cos C}{\sin B \cdot \sin C}$ $\cos b = \frac{\cos B + \cos A \cdot \cos C}{\sin A \cdot \sin C}$ $\cos c = \frac{\cos C + \cos A \cdot \cos B}{\sin A \cdot \sin B}$	(3c)

公 式 名 称	公 式	編 号
球面四联关系式	$\begin{aligned} \operatorname{ctg} a \cdot \sin b &= \operatorname{ctg} A \cdot \sin C + \cos C \cdot \cos b \\ \operatorname{ctg} a \cdot \sin c &= \operatorname{ctg} A \cdot \sin B + \cos B \cdot \cos c \\ \operatorname{ctg} b \cdot \sin a &= \operatorname{ctg} B \cdot \sin C + \cos C \cdot \cos a \\ \operatorname{ctg} b \cdot \sin c &= \operatorname{ctg} B \cdot \sin A + \cos A \cdot \cos c \\ \operatorname{ctg} c \cdot \sin a &= \operatorname{ctg} C \cdot \sin B + \cos B \cdot \cos a \\ \operatorname{ctg} c \cdot \sin b &= \operatorname{ctg} C \cdot \sin A + \cos A \cdot \cos b \end{aligned}$	(4)
球面半正矢公式	$\begin{aligned} \operatorname{Hav} a &= \operatorname{Hav}(b-c) + \sin b \cdot \sin c \cdot \operatorname{Hav} A \\ \operatorname{Hav} b &= \operatorname{Hav}(a-c) + \sin a \cdot \sin c \cdot \operatorname{Hav} B \\ \operatorname{Hav} c &= \operatorname{Hav}(a-b) + \sin a \cdot \sin b \cdot \operatorname{Hav} C \end{aligned}$	(5)
	$\begin{aligned} \operatorname{Hav} A &= \csc b \cdot \csc c + \sqrt{\operatorname{Hav}(a+b-c) \cdot \operatorname{Hav}(a-b-c)} \\ \operatorname{Hav} B &= \csc a \cdot \csc c + \sqrt{\operatorname{Hav}(b+a-c) \cdot \operatorname{Hav}(b-a-c)} \\ \operatorname{Hav} C &= \csc a \cdot \csc b + \sqrt{\operatorname{Hav}(c+a-b) \cdot \operatorname{Hav}(c-a-b)} \end{aligned}$	(7)
球面半正矢补角公式	$\begin{aligned} \operatorname{Shav} a &= \operatorname{Shav} A \cdot \operatorname{Shav}(b-c) + \operatorname{Shav}(180^\circ - A) \cdot \operatorname{Shav}(b+c) \\ \operatorname{Shav} b &= \operatorname{Shav} B \cdot \operatorname{Shav}(a-c) + \operatorname{Shav}(180^\circ - B) \cdot \operatorname{Shav}(a+c) \\ \operatorname{Shav} c &= \operatorname{Shav} C \cdot \operatorname{Shav}(a-b) + \operatorname{Shav}(180^\circ - C) \cdot \operatorname{Shav}(a+b) \end{aligned}$	(6)

公 式 名 稱	公 式	編 號
球面半角正弦公式	$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin p_b \cdot \sin p_c}{\sin b \cdot \sin c}}$ $\sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin p_a \cdot \sin p_c}{\sin a \cdot \sin c}}$ $\sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin p_a \cdot \sin p_b}{\sin a \cdot \sin b}}$	(8)
球面半角余弦公式	$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin p \cdot \sin p_a}{\sin b \cdot \sin c}}$ $\cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin p \cdot \sin p_b}{\sin a \cdot \sin c}}$ $\cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin p \cdot \sin p_a}{\sin a \cdot \sin b}}$	(9)
球面半角正切公式	$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin p_b \cdot \sin p_c}{\sin p \cdot \sin p_a}}$ $\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin p_a \cdot \sin p_c}{\sin p \cdot \sin p_b}}$ $\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin p_a \cdot \sin p_b}{\sin p \cdot \sin p_c}}$	(10)

公 式 名 称	公 式	編 号
球面半边正弦公式	$\sin \frac{a}{2} = \sqrt{-\frac{\cos P \cdot \cos P_A}{\sin B \cdot \sin C}}$	(11)
	$\sin \frac{b}{2} = \sqrt{-\frac{\cos P \cdot \cos P_B}{\sin A \cdot \sin C}}$	
	$\sin \frac{c}{2} = \sqrt{-\frac{\cos P \cdot \cos P_C}{\sin A \cdot \sin B}}$	
	$\sin \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{E}{2} \cdot \sin(A - \frac{E}{2})}{\sin B \cdot \sin C}}$	(14)
	$\sin \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{E}{2} \cdot \sin(B - \frac{E}{2})}{\sin A \cdot \sin C}}$	
	$\sin \frac{c}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{E}{2} \cdot \sin(C - \frac{E}{2})}{\sin A \cdot \sin B}}$	
球面半边余弦公式	$\cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos P_B \cdot \cos P_C}{\sin B \cdot \sin C}}$	(12)
	$\cos \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{\cos P_A \cdot \cos P_C}{\sin A \cdot \sin C}}$	

公 式 名 稱	公 式	編 号
	$\cos \frac{c}{2} = \sqrt{\frac{\cos P_A \cdot \cos P_B}{\sin A \cdot \sin B}}$ $\cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin(B - \frac{E}{2}) \cdot \sin(C - \frac{E}{2})}{\sin B \cdot \sin C}}$ $\cos \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{\sin(A - \frac{E}{2}) \cdot \sin(C - \frac{E}{2})}{\sin A \cdot \sin C}}$ $\cos \frac{c}{2} = \sqrt{\frac{\sin(A - \frac{E}{2}) \cdot \sin(B - \frac{E}{2})}{\sin A \cdot \sin B}}$ $\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \sqrt{-\frac{\cos P \cdot \cos P_A}{\cos P_B \cdot \cos P_C}}$ $\operatorname{tg} \frac{b}{2} = \sqrt{-\frac{\cos P \cdot \cos P_B}{\cos P_A \cdot \cos P_C}}$ $\operatorname{tg} \frac{c}{2} = \sqrt{-\frac{\cos P \cdot \cos P_C}{\cos P_A \cdot \cos P_B}}$	<p>(15)</p> <p>(13)</p>

球面半邊正切公式

公 式 名 称	公 式	編 号
	$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{E}{2} \cdot \sin(A - \frac{E}{2})}{\sin(B - \frac{E}{2}) \cdot \sin(C - \frac{E}{2})}}$	(16)
	$\operatorname{tg} \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{E}{2} \cdot \sin(B - \frac{E}{2})}{\sin(A - \frac{E}{2}) \cdot \sin(C - \frac{E}{2})}}$	
	$\operatorname{tg} \frac{c}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{E}{2} \cdot \sin(C - \frac{E}{2})}{\sin(A - \frac{E}{2}) \cdot \sin(B - \frac{E}{2})}}$	
	$\cos \frac{1}{2}(A - B) = \sin \frac{1}{2}(a + b) \cdot \csc \frac{c}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$	
德朗布尔方程式	$\cos \frac{1}{2}(A + B) = \cos \frac{1}{2}(a + b) \cdot \sec \frac{c}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$	(17)
	$\sin \frac{1}{2}(A - B) = \sin \frac{1}{2}(a - b) \cdot \csc \frac{c}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}$	
	$\sin \frac{1}{2}(A + B) = \cos \frac{1}{2}(a - b) \cdot \sec \frac{c}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}$	

公 式 名 称	公 式	編 号
納比尔相似方程式	$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B) &= \sin \frac{1}{2}(a-b) \cdot \csc \frac{1}{2}(a+b) \cdot \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B) &= \cos \frac{1}{2}(a-b) \cdot \sec \frac{1}{2}(a+b) \cdot \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2}(a-b) &= \sin \frac{1}{2}(A-B) \cdot \csc \frac{1}{2}(A+B) \cdot \operatorname{tg} \frac{c}{2} \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2}(a+b) &= \cos \frac{1}{2}(A-B) \cdot \sec \frac{1}{2}(A+B) \cdot \operatorname{tg} \frac{c}{2} \end{aligned}$	(18)
球面直角三角形公式 ($C=90^\circ$)	$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B)} &= \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a+b)} \\ \sin a &= \sin A \cdot \sin c \\ \sin a &= \operatorname{ctg} B \cdot \operatorname{tg} b \\ \sin b &= \sin B \cdot \sin c \\ \sin b &= \operatorname{ctg} A \cdot \operatorname{tg} a \\ \cos c &= \cos a \cdot \cos b \\ \cos c &= \operatorname{ctg} A \cdot \operatorname{ctg} B \end{aligned}$	

續表

公 式 名 称	公 式	編 号
球面直边三角形公式 ($c=90^\circ$)	$\cos A = \sin B \cdot \cos a$	
	$\cos A = \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{ctg} c$	
	$\cos B = \sin A \cdot \cos b$	
	$\cos B = \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{ctg} c$	
	$\cos a \cdot \sin b = \sin c \cdot \cos A$	
	$\cos b \cdot \cos A = \sin B \cdot \cos c$	
	$\sin A \cdot \cos c = \cos a \cdot \cos B$	
	$\sin c \cdot \cos B = \cos b \cdot \sin a$	
	$\sin B \cdot \sin a = \sin A \cdot \sin b$	
	$\sin A = \sin a \cdot \sin C$	
	$\sin A = \operatorname{ctg} b \cdot \operatorname{tg} B$	
	$\sin B = \sin b \cdot \sin C$	
	$\sin B = \operatorname{ctg} a \cdot \operatorname{tg} A$	
	$\cos C = -\cos A \cdot \cos B$	
	$\cos C = -\operatorname{ctg} a \cdot \operatorname{ctg} b$	
	$\cos a = \sin b \cdot \cos A$	
	$\cos a = -\operatorname{tg} B \cdot \operatorname{ctg} C$	

附表

公 式 名 称	公 式	编 号
小的球面初等三角形: 正弦公式	$\cos b = \sin a \cdot \cos B$ $\cos b = -\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{ctg} C$ $\cos A \cdot \sin B = \sin C \cdot \cos a$ $\cos B \cdot \cos a = -\sin b \cdot \cos C$ $\sin a \cdot \cos C = -\cos A \cdot \cos b$ $\sin C \cdot \cos b = \cos B \cdot \sin A$ $\sin b \cdot \sin A = \sin a \cdot \sin B$ $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$	(19)
余弦公式	$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos A$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot c \cdot \cos B$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos C$	(20)
五联关系式	$a = b \cdot \cos C + c \cdot \cos B$ $b = a \cdot \cos C + c \cdot \cos A$ $c = a \cdot \cos B + b \cdot \cos A$	(21)
窄的球面初等三角形 ($a \rightarrow 0, A \rightarrow 0$)	$(c-b)_1 = a \cdot \cos B$ $(c-b)_2 = (c-b)_1 - \frac{a^2}{2} \cdot \sin^2 B \cdot \operatorname{ctg} C$	(22a) (22b)

續表

公 式 名 稱	公 式	編 号
球面三角微分关系式	$A_1 = a \cdot \sin B \cdot \csc c$	(24a)
	$A_2 = A_1 + \frac{1}{2} a^2 \cdot \sin 2B \cdot \operatorname{ctg} c \cdot \csc c$	(24b)
	$(C_{\pi} - B)_1 = A \cdot \cos c$	(25a)
	$(C_{\pi} - B)_2 = (C_{\pi} - B)_1 + \frac{A^2}{2} \cdot \sin^2 c \cdot \operatorname{ctg}^2 B$	(25b)
	$\operatorname{ctg} a \cdot da - \operatorname{ctg} A \cdot dA = \operatorname{ctg} b \cdot db - \operatorname{ctg} B \cdot dB = \operatorname{ctg} c \cdot dc - \operatorname{ctg} C \cdot dC$	(27)
	$da = \cos C \cdot db + \cos B \cdot dc + \sin b \cdot \sin C \cdot dA$ (或 $+\sin c \cdot \sin B \cdot dA$)	(28)
	$db = \cos A \cdot dc + \cos C \cdot da + \sin c \cdot \sin A \cdot dB$ (或 $+\sin a \cdot \sin C \cdot dB$)	
	$dc = \cos B \cdot da + \cos A \cdot db + \sin a \cdot \sin B \cdot dC$ (或 $+\sin b \cdot \sin A \cdot dC$)	
	$dA = \sin b \cdot \sin C \cdot da - (\cos c \cdot dB + \cos b \cdot dC)$	(29)
	$dB = \sin c \cdot \sin B \cdot da - (\cos c \cdot dB + \cos b \cdot dC)$	
	$dB = \sin c \cdot \sin A \cdot db - (\cos a \cdot dC + \cos d \cdot dA)$	
	$dB = \sin a \cdot \sin C \cdot db - (\cos a \cdot dC + \cos d \cdot dA)$	
	$dC = \sin a \cdot \sin B \cdot dc - (\cos b \cdot dA + \cos a \cdot dB)$ $dC = \sin b \cdot \sin A \cdot dc - (\cos b \cdot dA + \cos a \cdot dB)$	

公 式 名 稱	公 式	編 号
	$\left. \begin{aligned} \sin B \cdot da &= \sin A \cdot \cos c \cdot db + \sin a \cdot \cos B \cdot dC + \sin c \cdot dA \\ \sin C \cdot da &= \sin A \cdot \cos b \cdot dc + \sin a \cdot \cos C \cdot dB + \sin b \cdot dA \\ \sin C \cdot db &= \sin B \cdot \cos a \cdot dc + \sin b \cdot \cos C \cdot dA + \sin a \cdot dB \\ \sin A \cdot db &= \sin B \cdot \cos c \cdot da + \sin b \cdot \cos A \cdot dC + \sin c \cdot dB \\ \sin A \cdot dc &= \sin C \cdot \cos b \cdot da + \sin c \cdot \cos A \cdot dB + \sin b \cdot dC \\ \sin B \cdot dc &= \sin C \cdot \cos a \cdot db + \sin c \cdot \cos B \cdot dA + \sin a \cdot dC \end{aligned} \right\}$	(30)
球面角盈公式	$E = A + B + C - 180^\circ$	(31)
加諾里球面角盈公式	$\sin \frac{E}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\sin p \cdot \sin p_a \cdot \sin p_b \cdot \sin p_c}{\cos \frac{a}{2} \cdot \cos \frac{b}{2} \cdot \cos \frac{c}{2}}}$	(32)
留里尔球面角盈公式	$\operatorname{tg} \frac{E}{4} = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{p}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{p_a}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{p_b}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{p_c}{2}}$	(33)

續表

公 式 名 稱	公 式	編 號
尤勒球面角盈公式	$\cos \frac{E}{2} = \frac{1 + \cos a + \cos b + \cos c}{4 \cdot \cos \frac{a}{2} \cdot \cos \frac{b}{2} \cdot \cos \frac{c}{2}}$	(34)
球面三角形面积公式	$S_{ABC} = \frac{\pi R^2}{180^\circ} \cdot E$	(35)
球面內切圓半徑公式	$\operatorname{tg} \rho_I = \sqrt{\frac{\sin p_a \cdot \sin p_b \cdot \sin p_c}{\sin p}}$	(36)
	$\operatorname{tg} \theta_I = \sqrt{\frac{-\cos P \cdot \cos P_A \cdot \cos P_B \cdot \cos P_C}{2 \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}}}$	(37)
	$\operatorname{tg} \phi_I = \frac{\sqrt{\sin \frac{E}{2} \cdot \sin \left(A - \frac{E}{2} \right) \cdot \sin \left(B - \frac{E}{2} \right) \cdot \sin \left(C - \frac{E}{2} \right)}}{2 \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}}$	(38)

續表

公 式 名 稱	公 式	編 号
球面外接圓半徑公式	$\operatorname{tg} \rho_C = \frac{2 \cdot \sin \frac{a}{2} \cdot \sin \frac{b}{2} \cdot \sin \frac{c}{2}}{\sqrt{\sin p \cdot \sin p_a \cdot \sin p_b \cdot \sin p_c}}$	(39)
	$\operatorname{tg} \rho_C = \sqrt{-\frac{\cos P}{\cos P_A \cdot \cos P_B \cdot \cos P_C}}$	(40)
	$\operatorname{tg} \rho_C = \sqrt{\frac{\sin \frac{E}{2}}{\sin \left(A - \frac{E}{2} \right) \cdot \sin \left(B - \frac{E}{2} \right) \cdot \sin \left(C - \frac{E}{2} \right)}}$	(41)
球面座標系的关系	$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \rho \cdot \cos \theta$ $\operatorname{tg} y = \operatorname{tg} \rho \cdot \sin \theta$	(42)

公 式 名 稱	公 式	編 號
球面大圓曲綫方程式	$\operatorname{tg} x' = \operatorname{tg} x \cdot \cos y$	(43)
	$\operatorname{tg} y' = \operatorname{tg} y \cdot \cos x$	
	$\sin x = \sin x' \cdot \sec y'$	(44)
	$\sin y = \sin y' \cdot \sec x'$	
球面小圓曲綫方程式	$\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} a} + \frac{\operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} b} = 1$	(45)
	$\frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x_1}{\operatorname{tg} x_2 - \operatorname{tg} x_1} = \frac{\operatorname{tg} y - \operatorname{tg} y_1}{\operatorname{tg} y_2 - \operatorname{tg} y_1}$	(46)
	$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y = 1$	(47)
球面橢圓曲綫方程式	$\frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 a} + \frac{\operatorname{tg}^2 y}{\operatorname{tg}^2 b} = 1$	(48)
球面雙曲綫方程式	$\frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 a} - \frac{\operatorname{tg}^2 y}{\operatorname{tg}^2 b} = 1$	(49)

2. 平面三角公式彙編

公 式 名 稱	公 式
三角函数基本恒等式	$\left. \begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\ \sec^2 x &= \tan^2 x + 1 \\ \csc^2 x &= \cot^2 x + 1 \end{aligned} \right\}$
三角函数的加法定理：	
正弦的加法定理	$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$
余弦的加法定理	$\begin{aligned} \sin(x-y) &= \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y \\ \cos(x+y) &= \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \\ \cos(x-y) &= \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y \end{aligned}$
正切的加法定理	$\begin{aligned} \tan(x+y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y} \\ \tan(x-y) &= \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y} \end{aligned}$
余切的加法定理	$\begin{aligned} \cotg(x+y) &= \frac{\cotg x \cdot \cotg y - 1}{\cotg x + \cotg y} \\ \cotg(x-y) &= \frac{\cotg x \cdot \cotg y + 1}{\cotg x - \cotg y} \end{aligned}$
正弦加法一般公式	$\sin \sum_{i=1}^n x_i = \sin(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \cos x_1 \cdot \cos x_2 \cdots$

公 式 名 称	公 式
余弦加法一般公式	$\cos x_n \cdot [P_1 - P_3 + P_5 - \dots]$ $P_1 = \operatorname{tg} x_1 + \operatorname{tg} x_2 + \dots + \operatorname{tg} x_n$ $P_2 = \operatorname{tg} x_1 \cdot \operatorname{tg} x_2 + \operatorname{tg} x_2 \cdot \operatorname{tg} x_3 + \dots + \operatorname{tg} x_{n-1} \cdot \operatorname{tg} x_n$ $P_k = \operatorname{tg} x_1 \cdot \operatorname{tg} x_2 \cdot \dots \cdot \operatorname{tg} x_k + \operatorname{tg} x_2 \cdot \operatorname{tg} x_3 \cdot \dots \cdot \operatorname{tg} x_{k+1} + \dots$ $\cos \sum_{i=1}^n x_i = \cos(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \cos x_1 \cdot \cos x_2 \cdot \dots \cdot \cos x_n$
倍弧的三角函数公式:	$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ $\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$ $\cdot [1 - P_2 + P_4 - \dots]$
倍弧三角函数一般公式	$\sin nx = C_n \sin x \cdot \cos^{n-1} x - C_n^3 \sin^3 x \cdot \cos^{n-3} x + C_n^5 \sin^5 x \cdot \cos^{n-5} x - \dots$ $\cos nx = \cos^n x - C_n^2 \sin^2 x \cdot \cos^{n-2} x + C_n^4 \sin^4 x \cdot \cos^{n-4} x - \dots$ $\cos nx + i \cdot \sin nx = (\cos x + i \cdot \sin x)^n$
分自变量三角函数公式	$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$

公 式 名 称	公 式
三角函数积化为和公式	$\cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$ $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$ $\sin x \cdot \sin y = \frac{\cos(x - y) - \cos(x + y)}{2}$ $\sin x \cdot \cos y = \frac{\sin(x + y) + \sin(x - y)}{2}$ $\cos x \cdot \sin y = \frac{\sin(x + y) - \sin(x - y)}{2}$ $\cos x \cdot \cos y = \frac{\cos(x - y) + \cos(x + y)}{2}$ $\sin x + \sin y = 2 \cdot \sin \frac{x + y}{2} \cdot \cos \frac{x - y}{2}$ $\sin x - \sin y = 2 \cdot \sin \frac{x - y}{2} \cdot \cos \frac{x + y}{2}$ $\cos x + \cos y = 2 \cdot \cos \frac{x + y}{2} \cdot \cos \frac{x - y}{2}$

三角函数和化为积公式

公 式 名 稱	公 式
三角函数代換式	$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$
	$\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cdot \cos y}$
	$\operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y = \pm \frac{\sin(x \pm y)}{\sin x \cdot \sin y}$
	$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$
	$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$
反三角函数公式	$\sin \cdot \sin^{-1} x = x$
	$\sin \cdot \cos^{-1} x = \sqrt{1 - x^2}$
	$\sin \cdot \operatorname{tg}^{-1} x = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$

公 式 名 稱	公 式
	$\sin \cdot \operatorname{ctg}^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
	$\cos \cdot \sin^{-1} x = \sqrt{1-x^2}$
	$\cos \cdot \cos^{-1} x = x$
	$\cos \cdot \operatorname{tg}^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
	$\cos \cdot \operatorname{ctg}^{-1} x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
	$\operatorname{tg} \cdot \sin^{-1} x = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
	$\operatorname{tg} \cdot \cos^{-1} x = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$
	$\operatorname{tg} \cdot \operatorname{tg}^{-1} x = x$
	$\operatorname{tg} \cdot \operatorname{ctg}^{-1} x = \frac{1}{x}$
	$\operatorname{ctg} \cdot \sin^{-1} x = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$
	$\operatorname{ctg} \cdot \cos^{-1} x = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

公 式 名 称	公 式
	$\operatorname{ctg} \cdot \operatorname{tg}^{-1} x = \frac{1}{x}$ $\operatorname{ctg} \cdot \operatorname{ctg}^{-1} x = x$ $\sin(n \cdot \sin^{-1} x) = C_n^1 (1-x^2)^{\frac{n-1}{2}} x - C_n^2 (1-x^2)^{\frac{n-3}{2}} x^3 + \dots$ $\cos(n \cdot \cos^{-1} x) = x^n - C_n^2 (1-x^2) x^{n-2} + C_n^4 (1-x^2) x^{n-4} - \dots$ $\operatorname{tg}(n \operatorname{tg}^{-1} x) = \frac{C_n^1 x - C_n^3 x^3 + \dots}{1 - C_n^2 x^2 + C_n^4 x^4 - \dots}$
平面三角正弦公式	$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$
平面三角五联关系式	$a = b \cdot \cos C + c \cdot \cos B$ $b = c \cdot \cos A + a \cdot \cos C$ $c = a \cdot \cos B + b \cdot \cos A$ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$ $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$
平面三角余弦公式	

公 式 名 稱	公 式
平面三角正切公式	$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B)}$ $\frac{b-c}{b+c} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(B-C)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(B+C)}$ $\frac{c-a}{c+a} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(C-A)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(C+A)}$
毛利維介(Мольвейде)公式	$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}C}$ $\frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}C}$
平面半角正弦公式	$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{P_b \cdot P_c}{b \cdot c}}$ $\sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{P_a \cdot P_c}{a \cdot c}}$ $\sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{P_a \cdot P_b}{a \cdot b}}$

公 式 名 稱	公 式
平面半角余弦公式	$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{P \cdot P_a}{b \cdot c}}$ $\cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{P \cdot P_b}{a \cdot c}}$ $\cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{P \cdot P_c}{a \cdot b}}$
平面半角正切公式	$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{P_b \cdot P_c}{P \cdot P_a}}$ $\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{P_a \cdot P_c}{P \cdot P_b}}$ $\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{P_a \cdot P_b}{P \cdot P_c}}$
平面三角形面積公式	$S_{ABC} = \frac{1}{2} ab \cdot \sin C$ $= \frac{1}{2} bc \cdot \sin A$ $= \frac{1}{2} ca \cdot \sin B$ $= \sqrt{P \cdot P_a \cdot P_b \cdot P_c}$
平面內切圓半徑公式	$r_I = \sqrt{\frac{P_a \cdot P_b \cdot P_c}{P}}$

公 式 名 稱	公 式
平面傍切圓半徑公式	$r_a = \frac{P}{P_a} \cdot r$ $= P \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2}$ $r_b = \frac{P}{P_b} \cdot r$ $= P \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2}$ $r_c = \frac{P}{P_c} \cdot r$ $= P \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2}$
平面外接圓半徑公式	$R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{b}{2 \sin B} = \frac{c}{2 \sin C}$

[G e n e r a l I n f o r m a t i o n]

书名= 航用球面三角学

作者= 陈喜震编著

页数= 1 3 8

S S 号= 1 1 1 3 8 9 8 8

出版日期= 1 9 5 8 年0 8 月第1 版